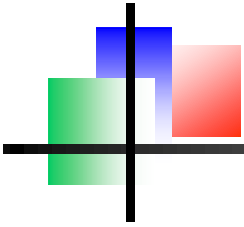


Podstawy Fizyki IV

Optyka z elementami fizyki współczesnej

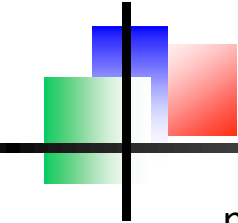
wykład 11, 19.03.2012

wykład:	Czesław Radzewicz
pokazy:	Radosław Chrapkiewicz, Filip Ozimek
ćwiczenia:	Ernest Grodner



Wykład 10 - przypomnienie

- lupa, powiększenie, sposoby używania
- okular, nomenklatura, przykładowe konstrukcje
- klasyczny mikroskop optyczny: konstrukcja, parametry
(powiększenie, zdolność rozdzielcza)
- mikroskop ciemnego pola
- mikroskop z kontrastem fazowym
- mikroskop konfokalny
- mikroskop dwufotonowy
- mikroskop bliskiego pola
- luneta i teleskop
- optyka adaptacyjna w teleskopach astronomicznych



superpozycja fal EM, 1

przypomnienie - wykład 1:

równanie falowe

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0$$

jest liniowe – suma rozwiązań jest także rozwiązaniem

Dwie płaskie fale monochromatyczne

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_{10} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1) = \vec{E}_{10} \cos \delta_1$$

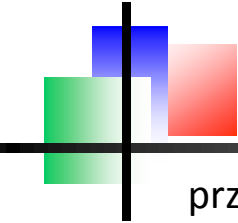
$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_{20} \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_2) = \vec{E}_{20} \cos \delta_2$$

$$\delta_1 = \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1$$

$$\delta_2 = \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_2$$

Dają falę wypadkową

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_{10} \cos \delta_1 + \vec{E}_{20} \cos \delta_2$$



superpozycja fal EM, 2

przypomnienie - wykład 2:

wektor Poyntinga i natężenie światła

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$\langle S \rangle = c \varepsilon_0 \langle \vec{E}^2 \rangle = c \varepsilon_0 \frac{1}{T} \int_0^T \vec{E}^2 dt$$

dla superpozycji 2 fal:

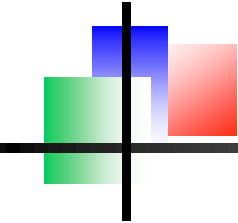
$$\begin{aligned} \vec{E}^2(\vec{r}, t) &= [\vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t)] \cdot [\vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t)] = \\ &= \vec{E}_{10}^2 \cos^2 \delta_1 + \vec{E}_{20}^2 \cos^2 \delta_2 + 2 \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cos \delta_1 \cos \delta_2 \end{aligned}$$

odrobina trygonometrii:

$$\begin{aligned} \cos \delta_1 \cos \delta_2 &= \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_1) \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_2) = \\ &= [\cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1) \cos(\omega t) + \sin(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1) \sin(\omega t)] \\ &\quad \cdot [\cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2) \cos(\omega t) + \sin(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2) \sin(\omega t)] = \dots \\ &= \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1) \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2) \cos^2(\omega t) + \\ &\quad + \sin(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1) \sin(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2) \sin^2(\omega t) + \\ &\quad + (\dots) \cos(\omega t) \sin(\omega t) \end{aligned}$$

ostatecznie:

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}_{10} \vec{E}_{20} \cos \delta_1 \cos \delta_2 \rangle &= \vec{E}_{10} \vec{E}_{20} \cos \delta \\ \delta &= \delta_1 - \delta_2 = \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_1 - \varphi_2 \end{aligned}$$



superpozycja fal EM, 3

$$\langle S \rangle = c\varepsilon_0 \langle \vec{E}^2 \rangle = \underbrace{\frac{c\varepsilon_0}{2} \vec{E}_{10}^2}_{I_1} + \underbrace{\frac{c\varepsilon_0}{2} \vec{E}_{20}^2}_{I_2} + \underbrace{c\varepsilon_0 \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cos \delta}_{\text{człon interferencyjny}}, \quad \delta = \delta_1 - \delta_2$$

rachunki są dużo prostsze dla liczb zespolonych

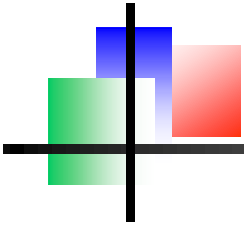
$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_{10} e^{i\delta_1}$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_{20} e^{i\delta_2}$$

bo

$$\begin{aligned} |\vec{E}|^2 &= \vec{E} \cdot \vec{E}^* = (\vec{E}_{10} e^{i\delta_1} + \vec{E}_{20} e^{i\delta_2}) \cdot (\vec{E}_{10} e^{-i\delta_1} + \vec{E}_{20} e^{-i\delta_2}) \\ &= \dots \\ &= \vec{E}_{01}^2 + \vec{E}_{02}^2 + 2\vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cos \delta \end{aligned}$$

Uwaga: ten wynik nie zależy od tego jakie fale dodajemy do siebie



superpozycja fal EM, 4

$$\langle S \rangle = c\varepsilon_0 \langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{c\varepsilon_0}{2} \vec{E}_{10}^2 + \frac{c\varepsilon_0}{2} \vec{E}_{20}^2 + c\varepsilon_0 \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cos \delta$$

wynik interferencji zależy od polaryzacji światła!

Wzajemnie prostopadłe polaryzacje nie interferują.

Dla identycznych polaryzacji: $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$

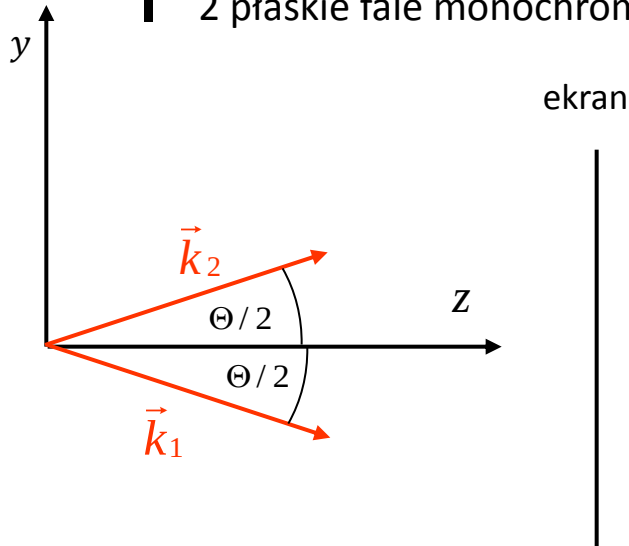
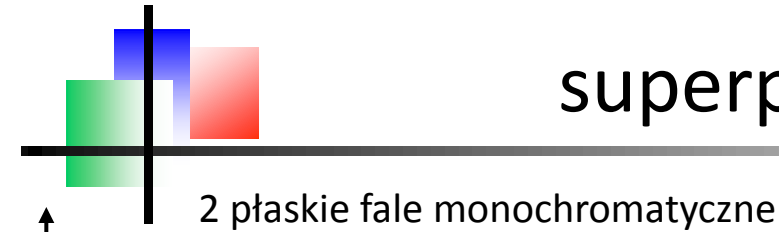
W szczególnym przypadku

$$I_1 = I_2 = I_0$$

mamy:

$$I = 2I_0(1 + \cos \delta) = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

superpozycja fal EM, 5



$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

Identyczne natężenia obu fal:

$$I = 2I_0(1 + \cos \delta)$$

$$\delta = \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_1 - \varphi_2 = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} + \varphi_1 - \varphi_2$$

maksima dla:

$$-2ky \sin \frac{\Theta}{2} + \varphi_1 - \varphi_2 = m \cdot 2\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

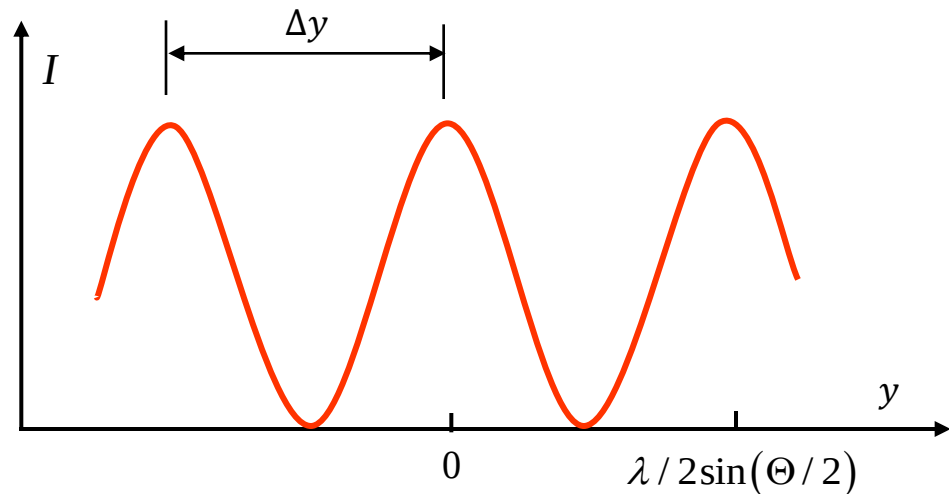
$$\Delta y = \frac{\pi}{k \sin \frac{\Theta}{2}} = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\Theta}{2}}$$

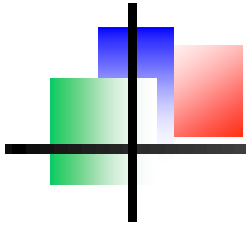
$$\vec{k}_1 = \left[0, -k \sin \frac{\Theta}{2}, k \cos \frac{\Theta}{2} \right]$$

$$\vec{k}_2 = \left[0, k \sin \frac{\Theta}{2}, k \cos \frac{\Theta}{2} \right]$$

$$(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} = -ky \sin \frac{\Theta}{2}$$

różne amplitudy –
większa modulacja



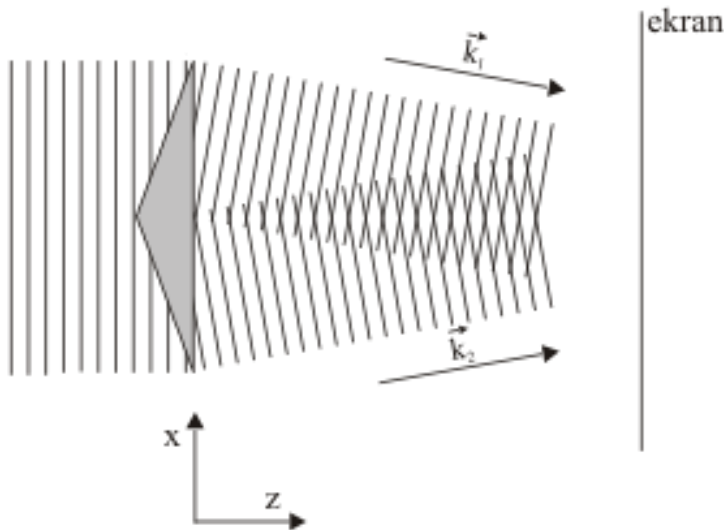


superpozycja fal EM, 6

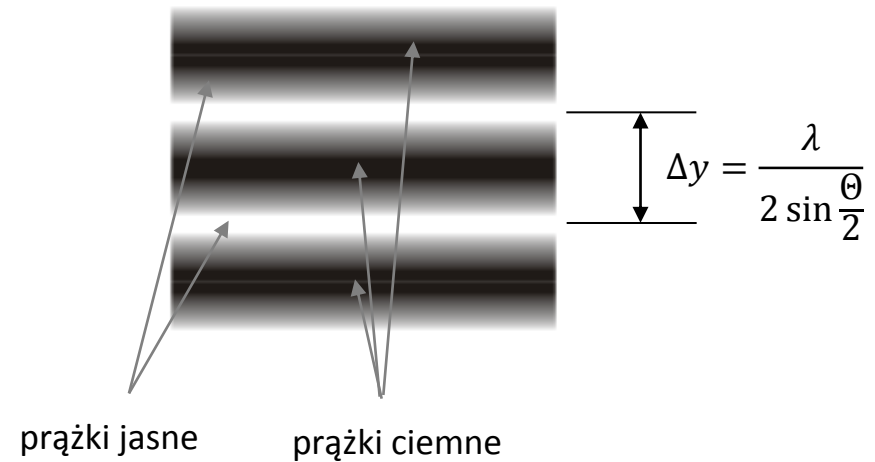
prążki interferencyjne

a)

bi-pryzmat Fresnela

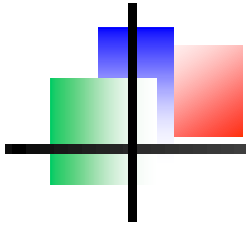


b)



Fale przeciwbieżne: $\Theta = \pi$ dają rozkład natężenia $I = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2y}{\lambda} + \varphi_1 - \varphi_2\right) \right]$ - fala stojąca

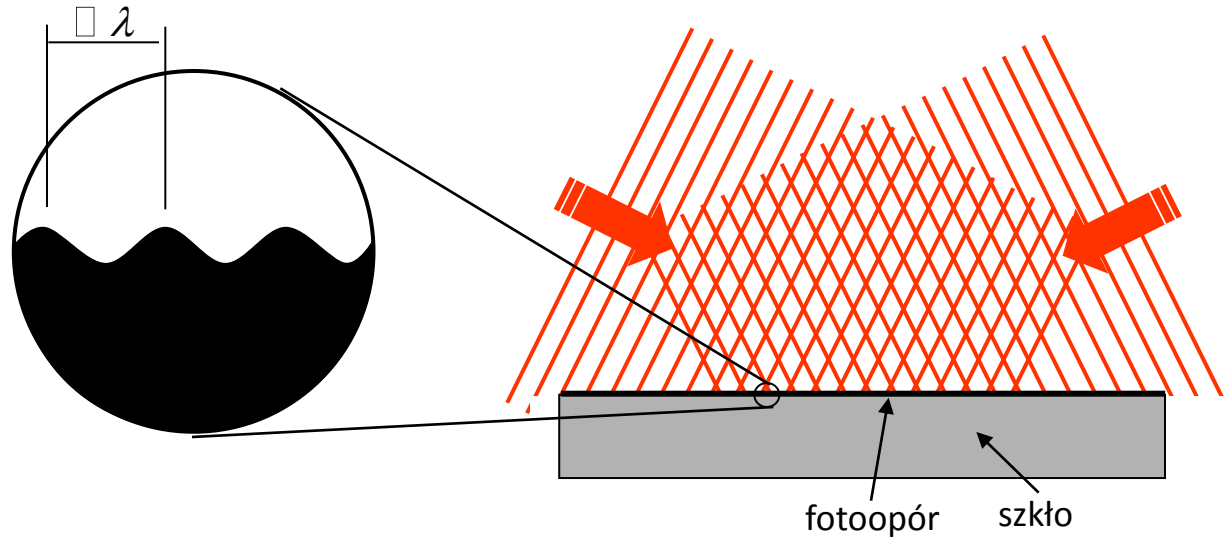
Fale współbieżne: $\Theta = 0$ dają rozkład natężenia $I = 2I_0 [1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]$ - ??????



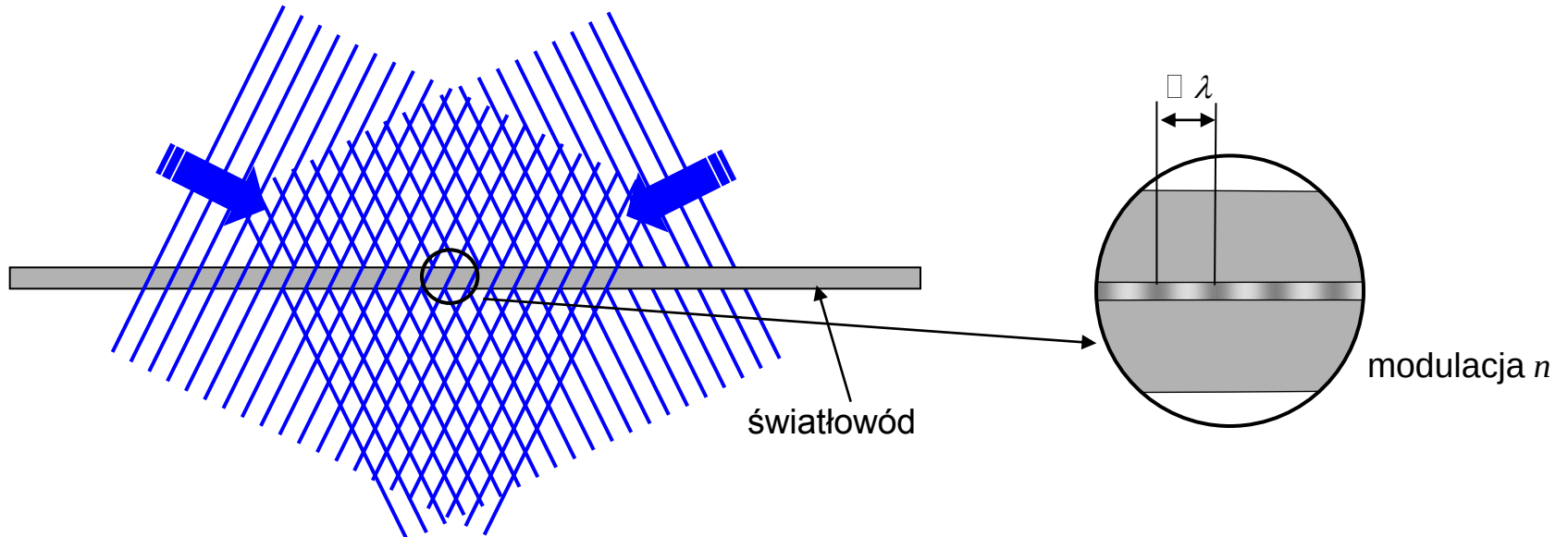
prążki - zastosowania

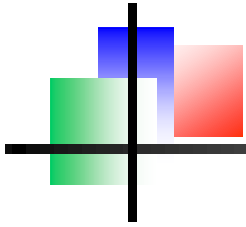
Produkcja siatek
dyfrakcyjnych holograficznych:

- pokrywanie fotooporem
- naświetlanie
- trawienie
- pokrywanie metalem

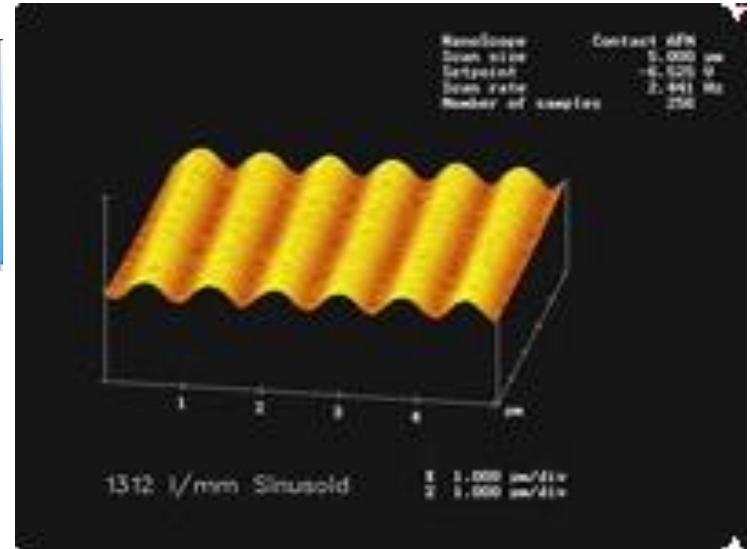
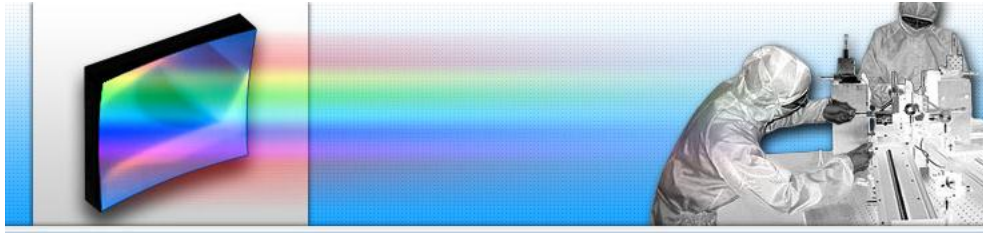


Światłowodowe filtry Bragga

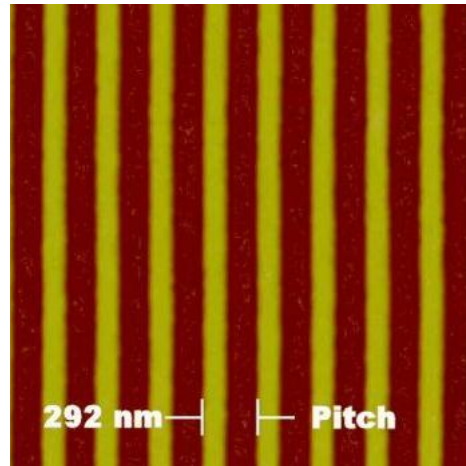




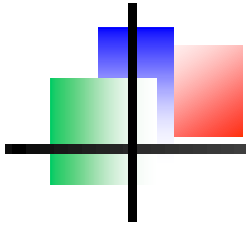
holograficzne siatki dyfrakcyjne



<http://www.ssiptics.com>



<http://www.2spi.com>



Interferencja fal sferycznych

Dwie sferyczne, spójne, monochromatyczne fale EM

$$\vec{E}_1(r_1, t) = \vec{E}_{10} \cos(kr_1 - \omega t + \varphi_1) = \vec{E}_{10} \cos \delta_1$$

$$\vec{E}_2(r_2, t) = \vec{E}_{20} \cos(kr_2 - \omega t + \varphi_2) = \vec{E}_{20} \cos \delta_2$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

$$\delta = \delta_1 - \delta_2$$

maksima dla:

$$\delta = m \cdot 2\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

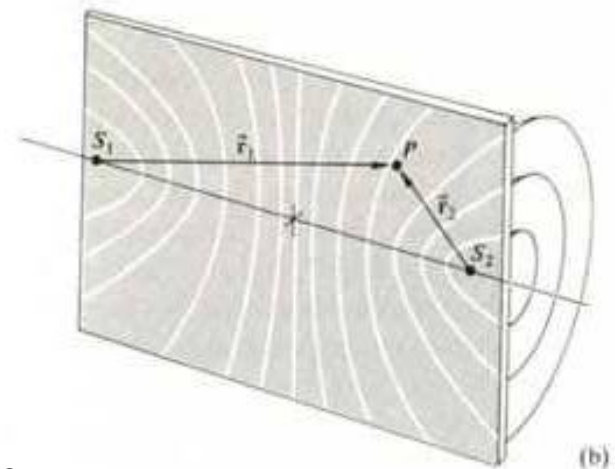
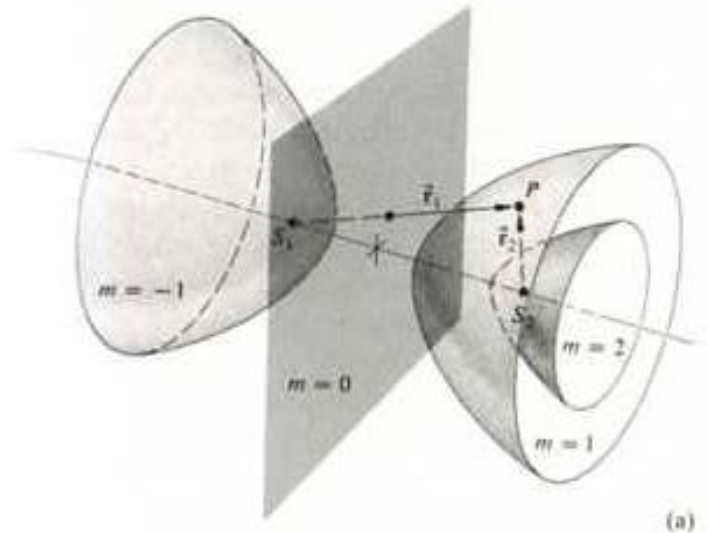
$$r_1 - r_2 = \frac{2m\pi + \varphi_1 - \varphi_2}{k}$$

minima dla:

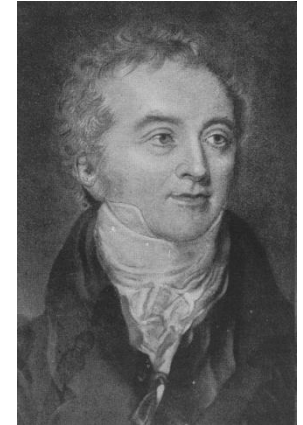
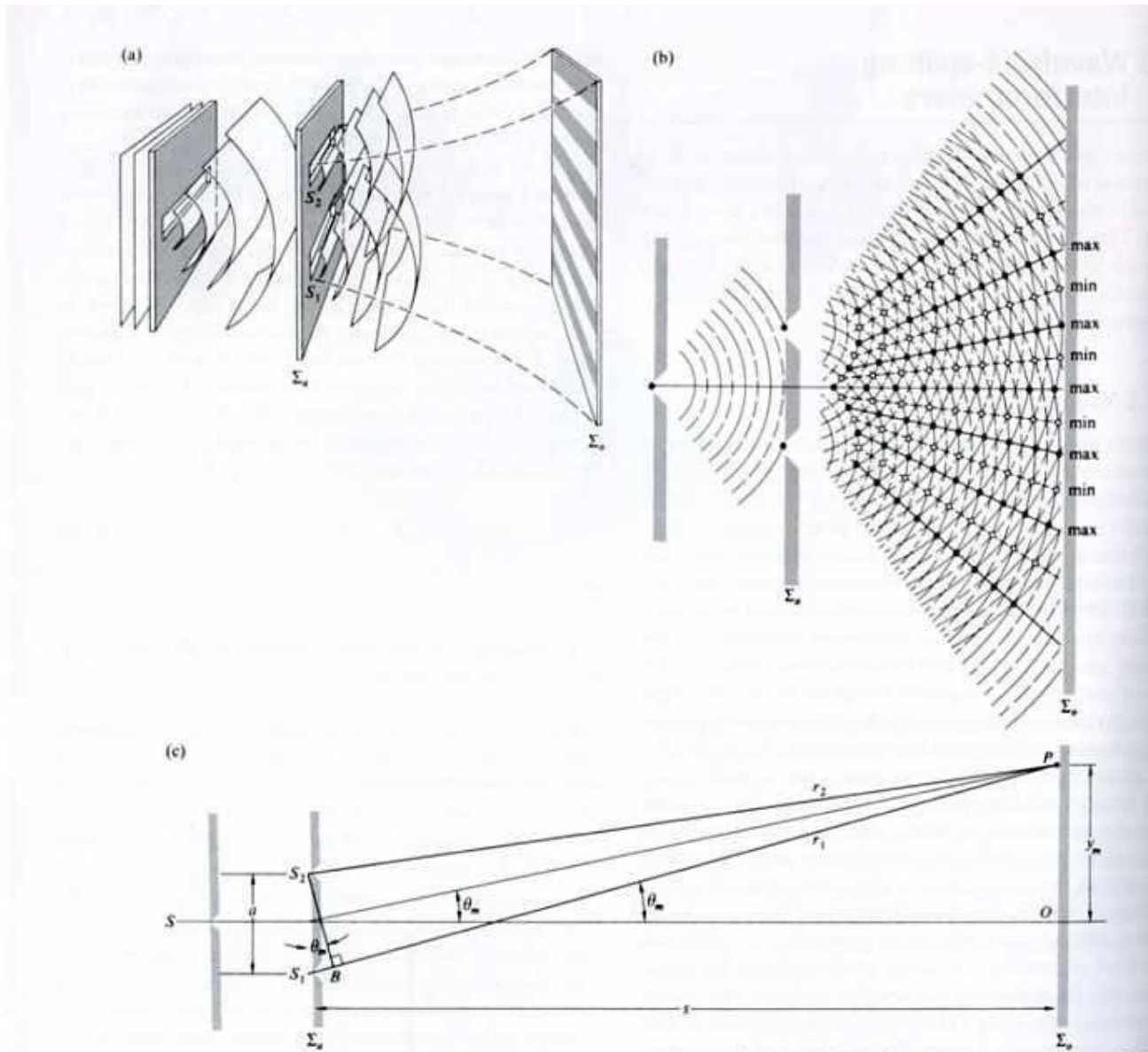
$$\delta = m' \cdot \pi, \quad m' = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots$$

$$r_1 - r_2 = \frac{m'\pi + \varphi_1 - \varphi_2}{k}$$

prążki przestrzenne - hiperboloidy obrotowe

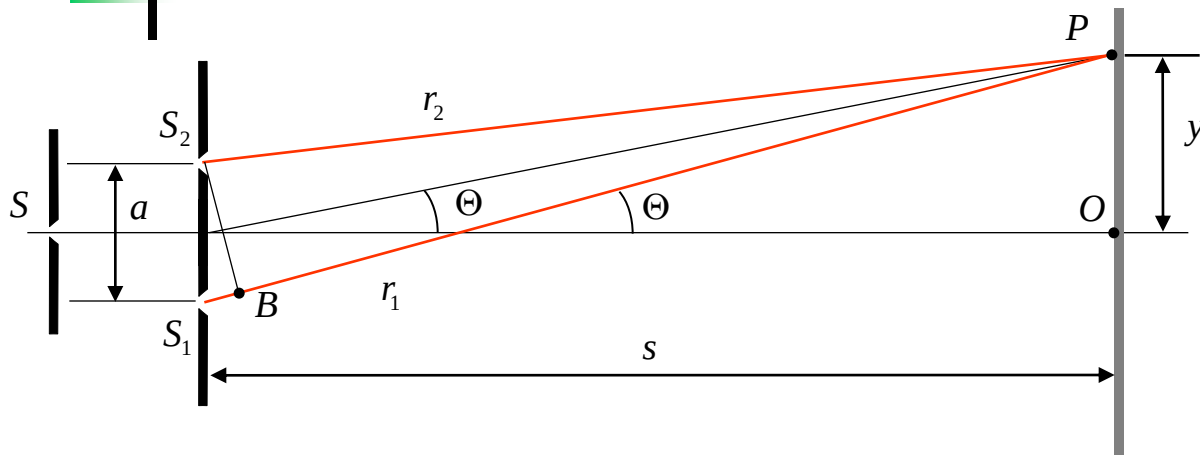


doświadczenie Younga, 1



Thomas Young
1773-1829

doświadczenie Younga, 2



Jeśli $a, y \ll s$

(obserwacja w **dalekim polu**)

to

$$S_1B \cong S_1P - S_2P$$

$$r_1 - r_2 = S_1B$$

$$\Theta \cong \frac{a}{s}$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$
$$\delta = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi(r_1 - r_2)}{\lambda}$$

Interferencja konstruktywna dla

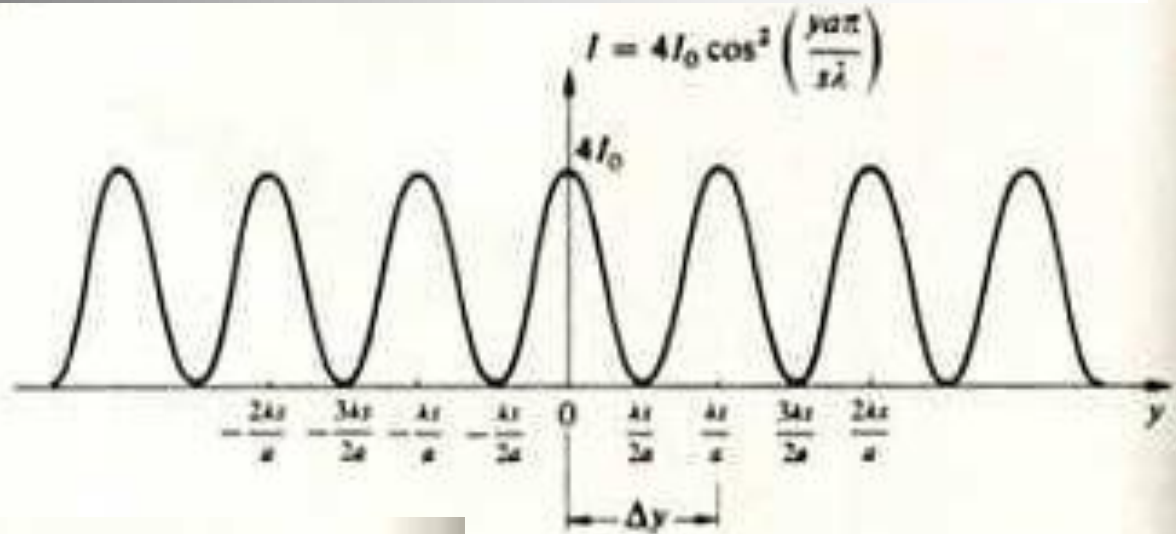
$$r_1 - r_2 = m\lambda, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\theta_m = m \frac{\lambda}{a}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

doświadczenie Younga, 3

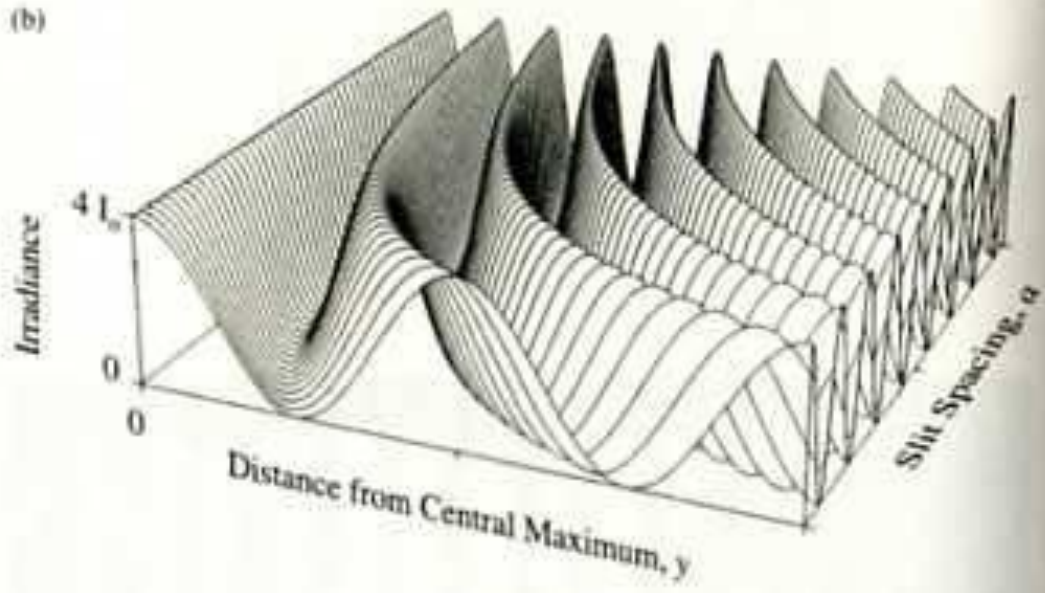
$$I_1 = I_2 = I_0$$

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi a y}{s \lambda}$$

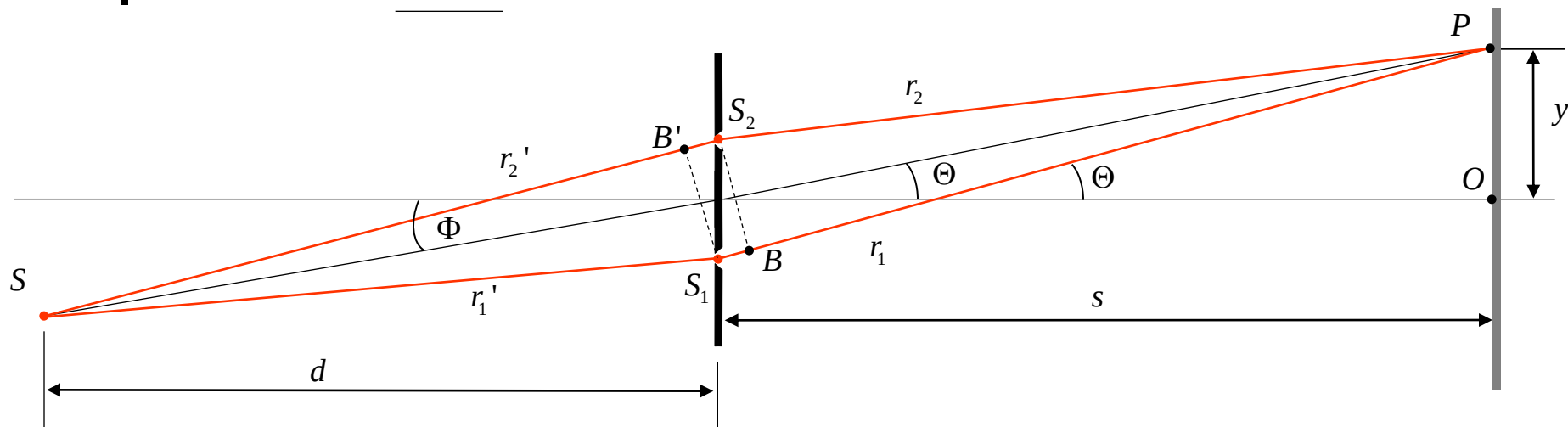


$$\Delta y = \frac{s \lambda}{a}$$

(b)



doświadczenie Younga – źródło punktowe



opóźnienie fazowe:

$$\begin{aligned}\delta &= (r_1 + r_1') - (r_2 + r_2') \\ &= (r_1' - r_2') + (r_1 - r_2)\end{aligned}$$

warunek na zerowy prążek
(dalekie pole):

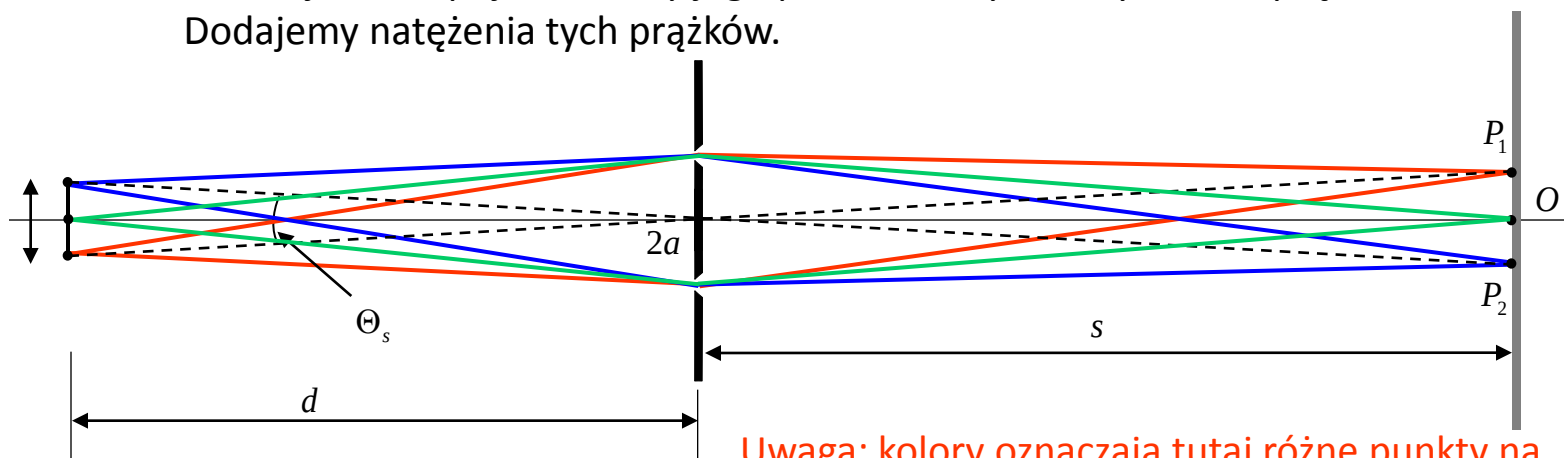
$$r_1 + r_1' = r_2 + r_2'$$

$$2a\Phi = 2a\Theta$$

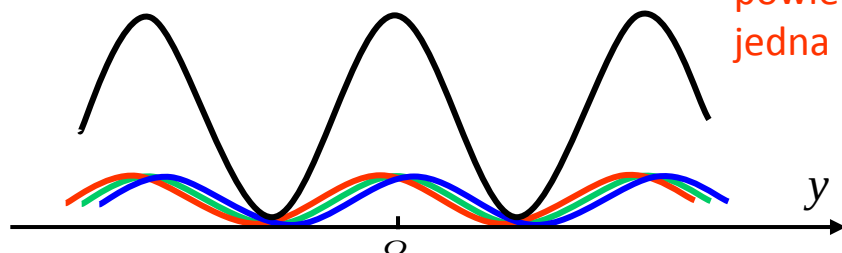
$$\Phi = \Theta$$

doświadczenie Younga – źródło rozciągnięte kwazi-monochromatyczne

Źródło jest niespójne – każdy jego punkt tworzy własny zestaw prążków. Dodajemy natężenia tych prążków.



Uwaga: kolory oznaczają tutaj różne punkty na powierzchni źródła a nie barwy. Barwa jest jedna bo źródło jest kwazi-monochromatyczne.

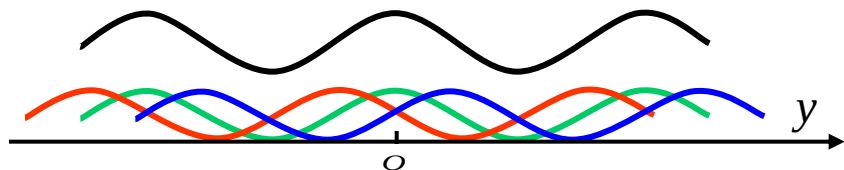


Widzialność prążków:

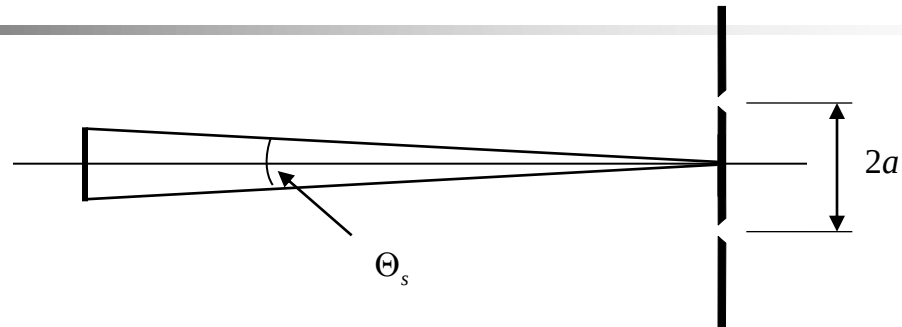
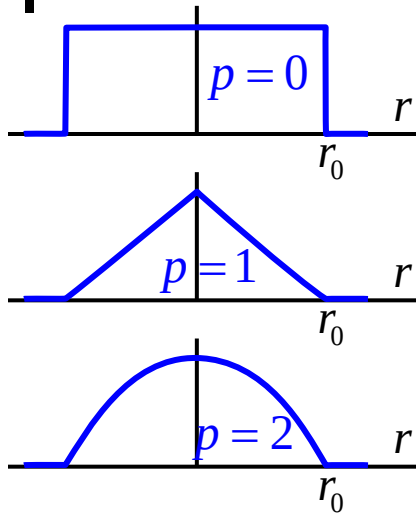
$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

Prążki rozmywają się gdy niebieski (P_2) i czerwony (P_1) mają przeciwne fazy:

$$\frac{\Delta y}{2} = \frac{\lambda s}{4a} = \Theta_s s$$
$$\Theta_s = \frac{\lambda}{4a}$$

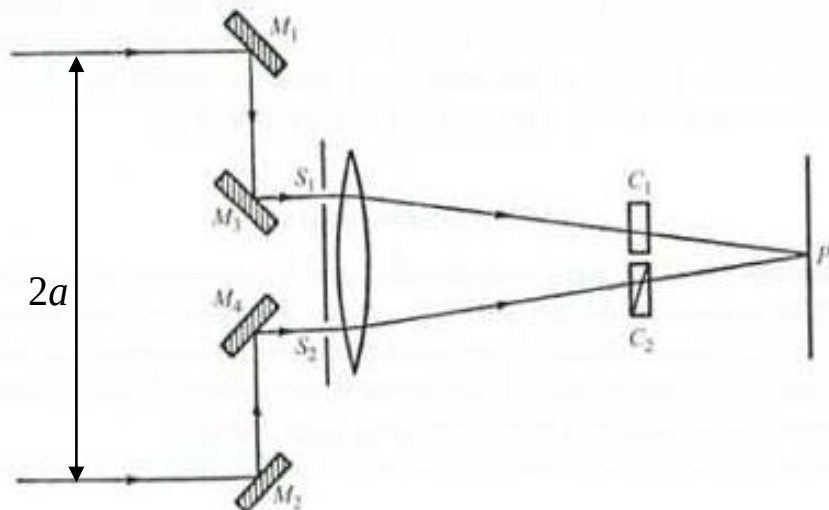
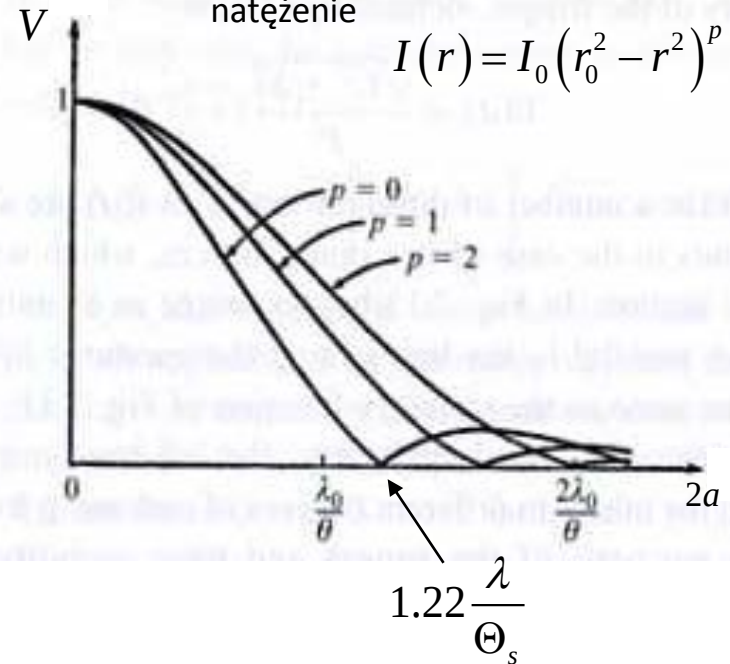


Interferometr gwiazdowy Michelsona

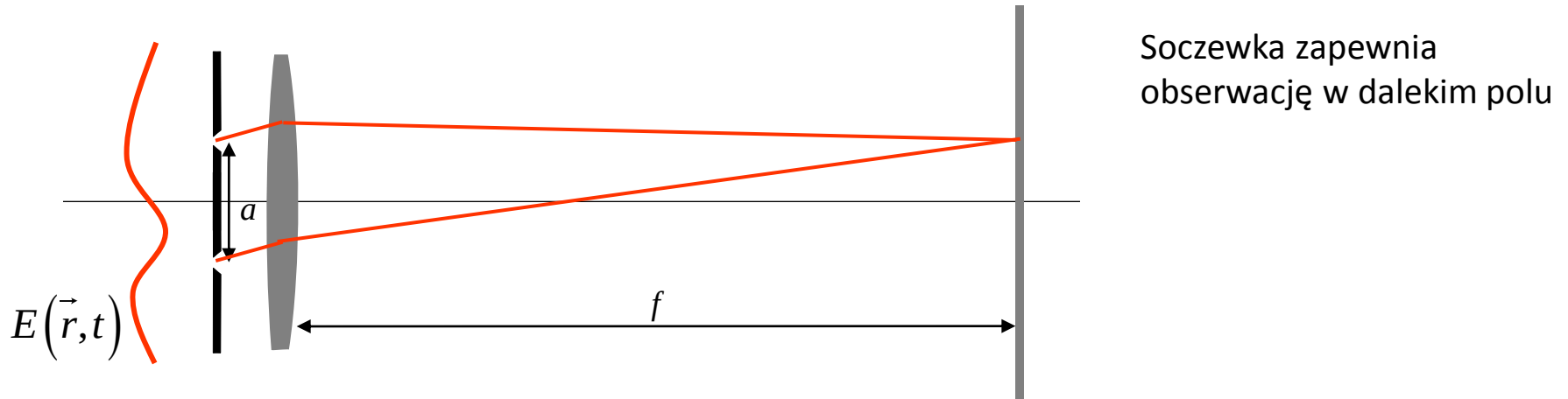


źródło w postaci koła o promieniu r_0
natężenie

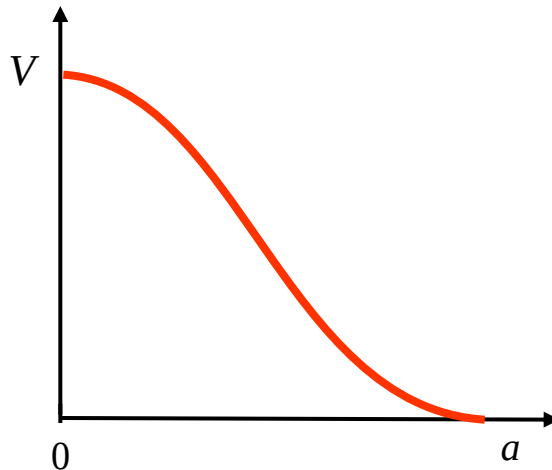
$$I(r) = I_0 (r_0^2 - r^2)^p$$



Spójność przestrzenna



Mierzmy widzialność prążków V
dla różnych odległości pomiędzy otworami



Pole spójne, niespójne, częściowo spójne

Spójność czasowa

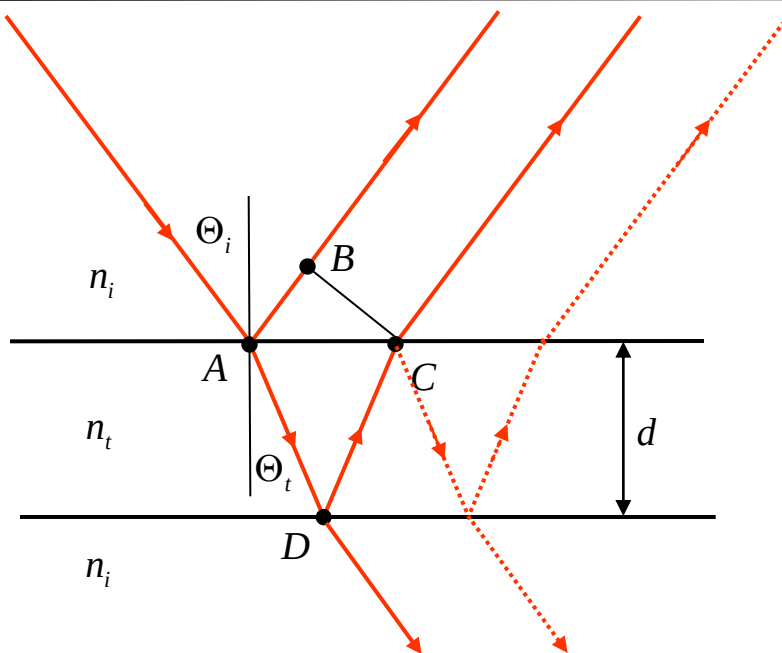
Spójność przestrzenna

Funkcja korelacji pola

$$G(r_1, r_2, \tau) = \langle E^*(r_1, t) E(r_2, t + \tau) \rangle$$

$\langle \rangle$ oznacza uśrednianie po czasie

Interferencja na błonach, 1



$$\Delta s = n_t \frac{2d}{\cos \Theta_t} - n_i AB$$

$$AB = AC \sin \Theta_i = 2d \tan \Theta_t \sin \Theta_i$$

$$\Delta s = n_t \frac{2d}{\cos \Theta_t} - 2d \tan \Theta_t \sin \Theta_i$$

Prawo Snella + rachunki:

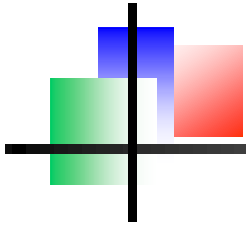
$$\Delta s = 2d \sqrt{n_t^2 - n_i^2} \sin \Theta_i$$

opóźnienie fazowe

$$\delta = k \Delta s = \frac{4\pi d}{\lambda} \sqrt{n_t^2 - n_i^2} \sin \Theta_i$$

Wykład 5; dodatkowe przesunięcie fazy o π :

$$\delta = \frac{4\pi d}{\lambda} \sqrt{n_t^2 - n_i^2} \sin \Theta_i + \pi$$



Interferencja na błonach, 2

$$\delta = \frac{4\pi d}{\lambda} \sqrt{n_t^2 - n_i^2 \sin^2 \Theta_i} + \pi$$

Dla padania normalnego:

$$\delta = \frac{4\pi n_t d}{\lambda} + \pi$$

Maksimum natężenia fali odbitej dla

$$\delta = m \cdot 2\pi, m = 1, 2, 3, \dots$$

Co daje

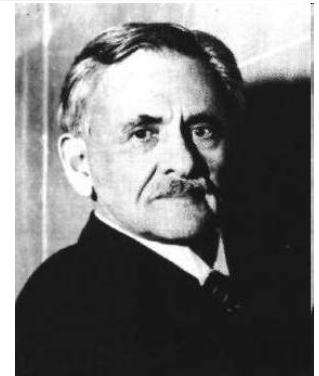
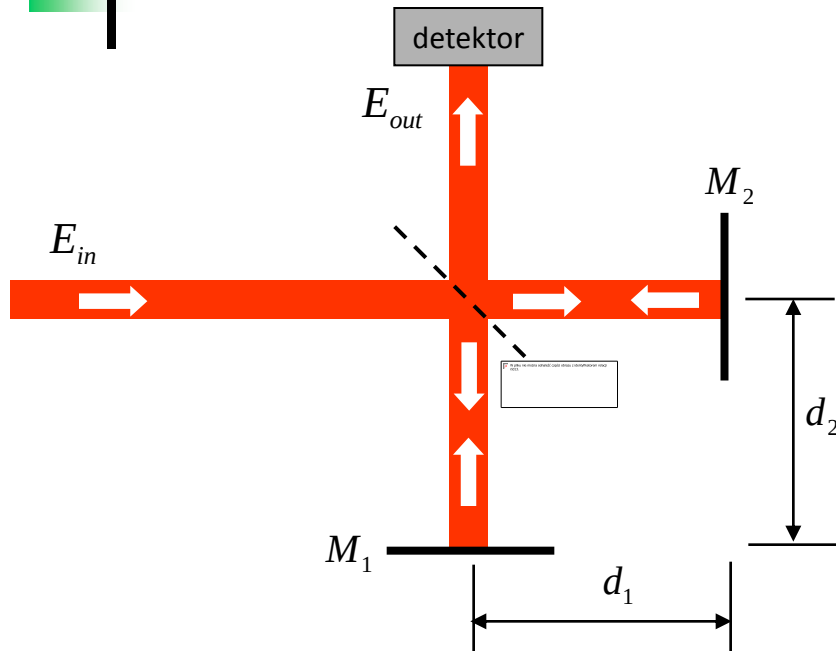
$$d = \frac{(2m - 1)\lambda}{4n_t}, m = 1, 2, 3, \dots$$

Woda $n_t = 1.33$ i $\lambda = 650\text{nm}$ daje

$$d = (2m - 1) \cdot 122\text{nm}$$



Interferometr Michelsona



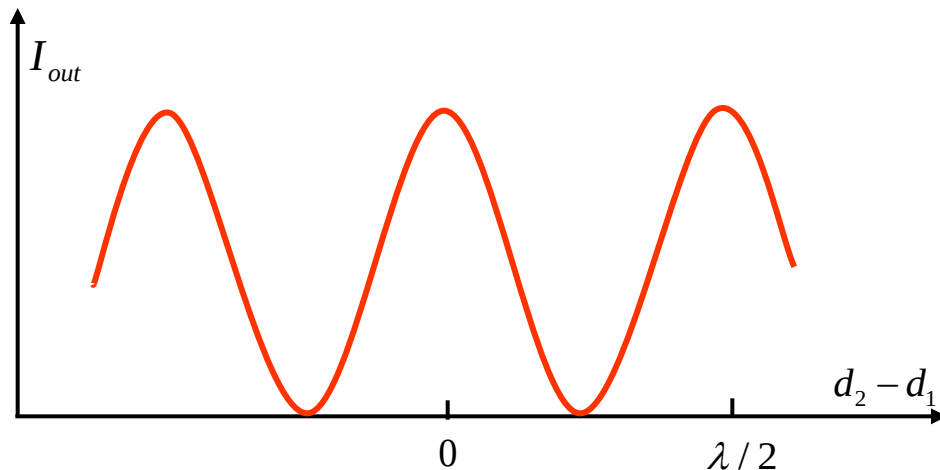
Albert Abraham
Michelson
(1852-1931)

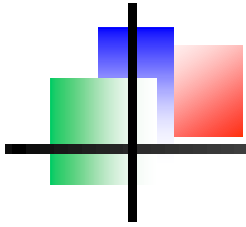
rozważmy falę monochromatyczną

$$E_{in} = E_0 e^{-i\omega t}$$

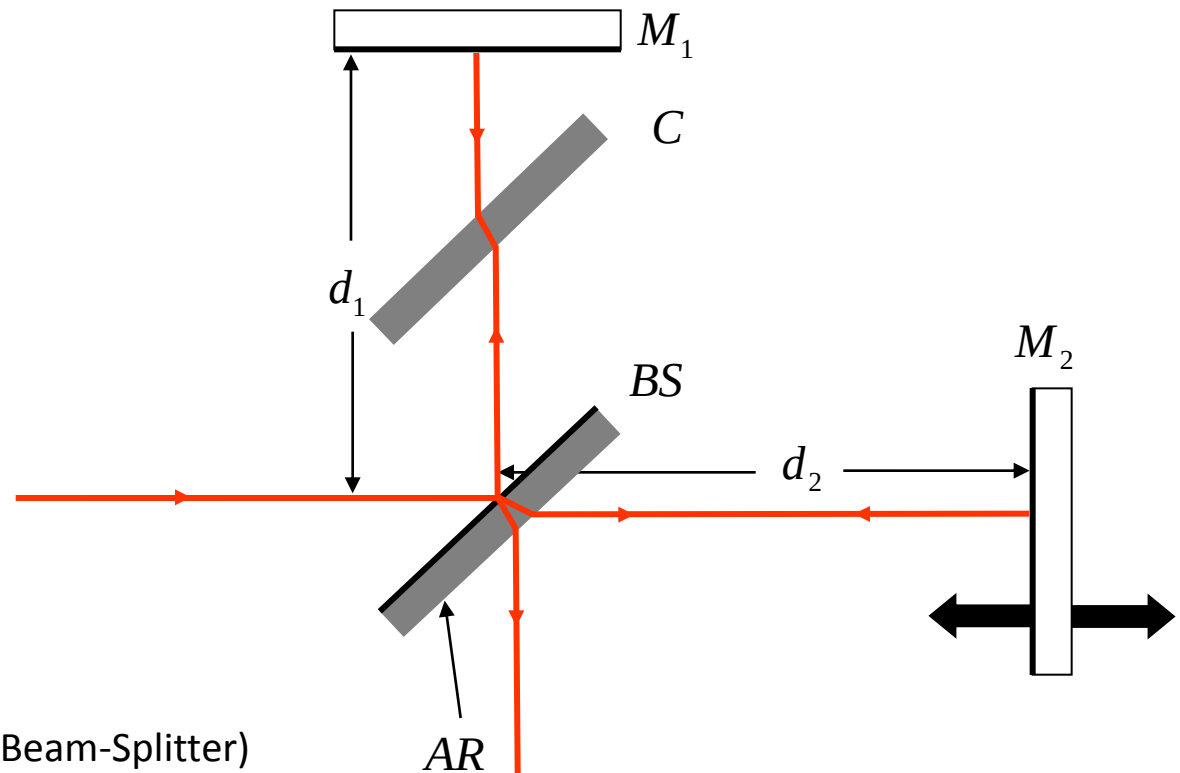
$$E_{out} = \frac{E_0}{2} e^{-i\omega t} e^{i\varphi} (e^{i2kd_1} + e^{i2kd_2})$$

$$I_{out} = \frac{I_{in}}{2} (1 + \cos \delta), \quad \delta = 2k(d_2 - d_1)$$





Int. Michelsona – uwagi praktyczne



BS Płyta światłodzieląca (ang. Beam-Splitter)

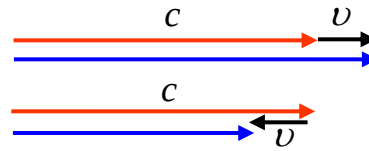
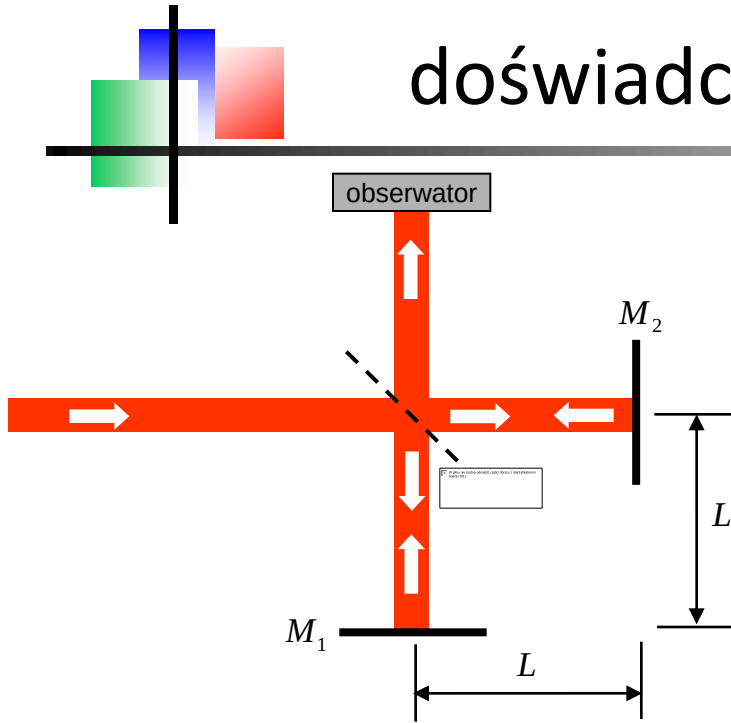
C Kompensator

M_1, M_2 Lustra

AR Antyrefleks (ang. AntiReflexion coating)

Dalekie pole za soczewką

doświadczenie Michelsona-Morleya



$$T_1 = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2L}{c\left(1 - v^2/c^2\right)}$$

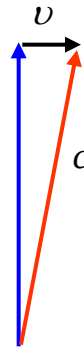
Michelson-Morley (1887)

oczekiwane

0.4 prążka

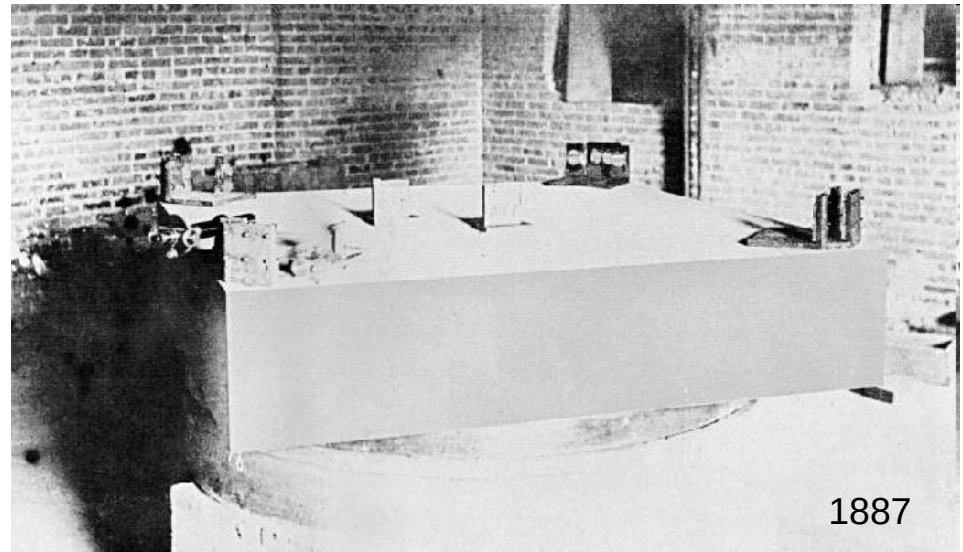
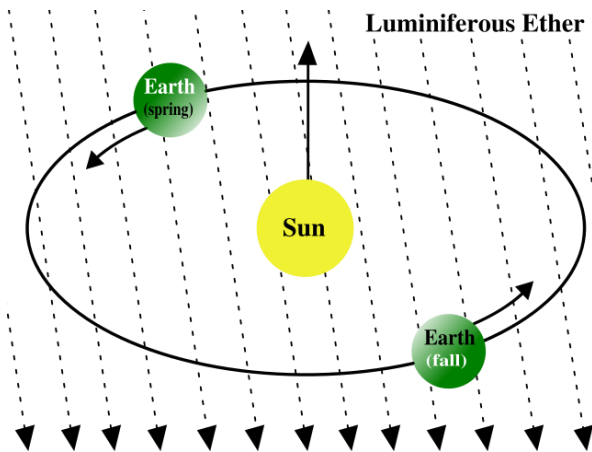
zmierzone

<0.01 prążka

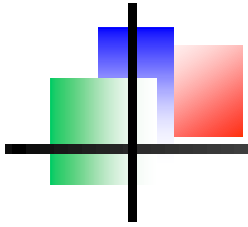


$$T_2 = \frac{2L}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

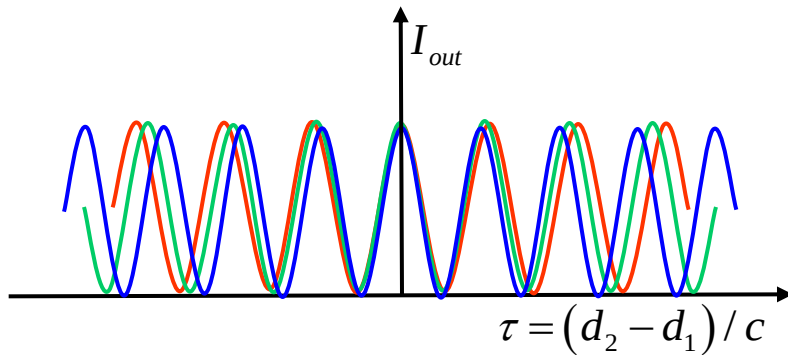
nie ma eteru!!!



1887



Interferometr Michelsona + szerokie pasmo

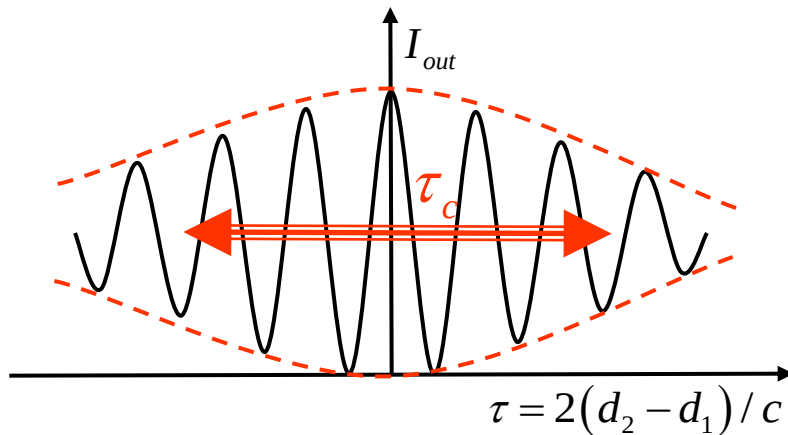


Widzialność prążków:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

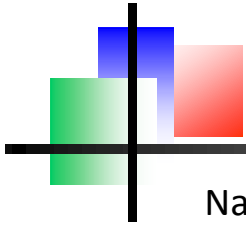
zależy od opóźnienia

$$V = V(\tau)$$



czas spójności: τ_c
droga spójności: $l_c = \tau_c c$

$$\tau_c \cong \frac{1}{\Delta\nu}, \quad \Delta\nu - \text{szerokość widma}$$



widmo światła, przypomnienie wykład 4

Natężenie spektralne (widmo) $I(\omega), I(\lambda)$:

$I(\omega)d\omega$ - natężenie dla częstości z przedziału $(\omega, \omega + d\omega)$

$I(\lambda)d\lambda$ - natężenie dla długości fali z przedziału $(\lambda, \lambda + d\lambda)$

Dla danego pola fali $E(t)$ liczymy jego transformatę Fouriera
i dostajemy amplitudę spektralną pola:

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt$$

Mając amplitudę spektralną możemy wrócić do
domeny czasu:

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Twierdzenie Parsewala:

$$\int |E(t)|^2 dt = \int |\tilde{E}(\omega)|^2 d\omega$$

$$\int I(t) dt = \int I(\omega) d\omega$$

widmo

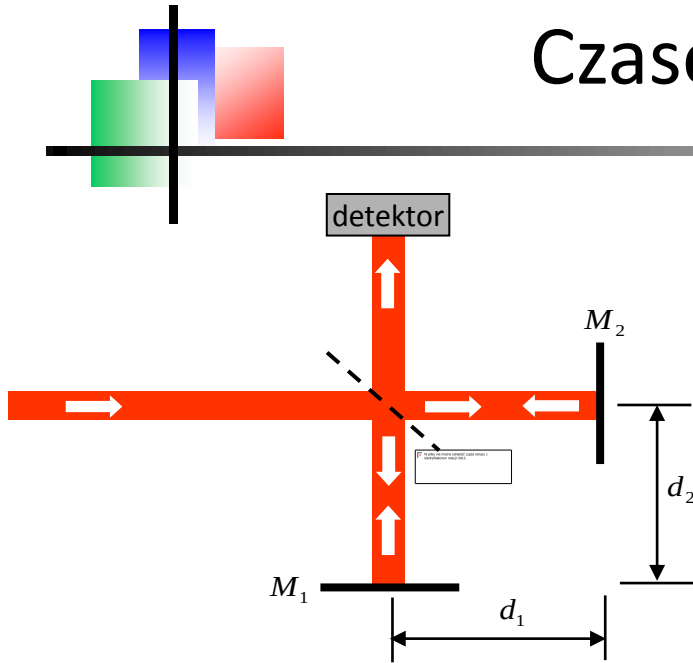
funkcja autokorelacji pola 1-go rzędu:

$$AC(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} E^*(t) E(t - \tau) dt$$

twierdzenie Wienera-Chinczyna

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} AC(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Czasowa autokorelacja pola



Funkcja korelacji czasowej pola

$$G(\tau) = \langle E^*(t)E(t + \tau) \rangle$$

$\langle \rangle$ oznacza uśrednianie po czasie

Pole na wyjściu z interferometru

$$E_{out}(t, \tau) = \frac{1}{2} [E_{in}(t) + E_{in}(t + \tau)]$$

Detektor całkuje:

$$\begin{aligned} I_{out} &\propto \langle E_{out} E_{out}^* \rangle = \\ &= \frac{1}{4} \langle [E_{in}(t) + E_{in}(t + \tau)][E_{in}^*(t) + E_{in}^*(t + \tau)] \rangle = \\ &= \frac{1}{2} I_{in} + \frac{1}{2} \text{Re}[G(\tau)] = \\ &= \frac{1}{2} I_{in} + \frac{1}{2} G(\tau) \end{aligned}$$

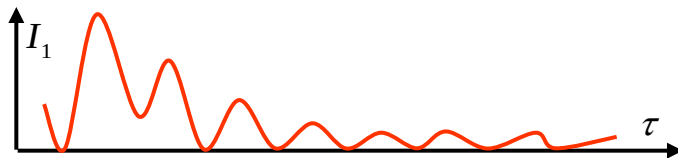
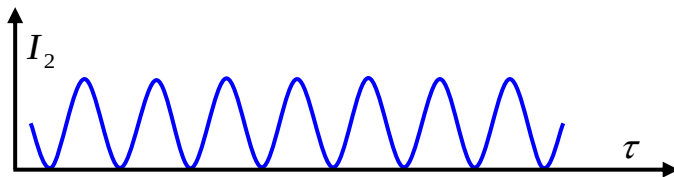
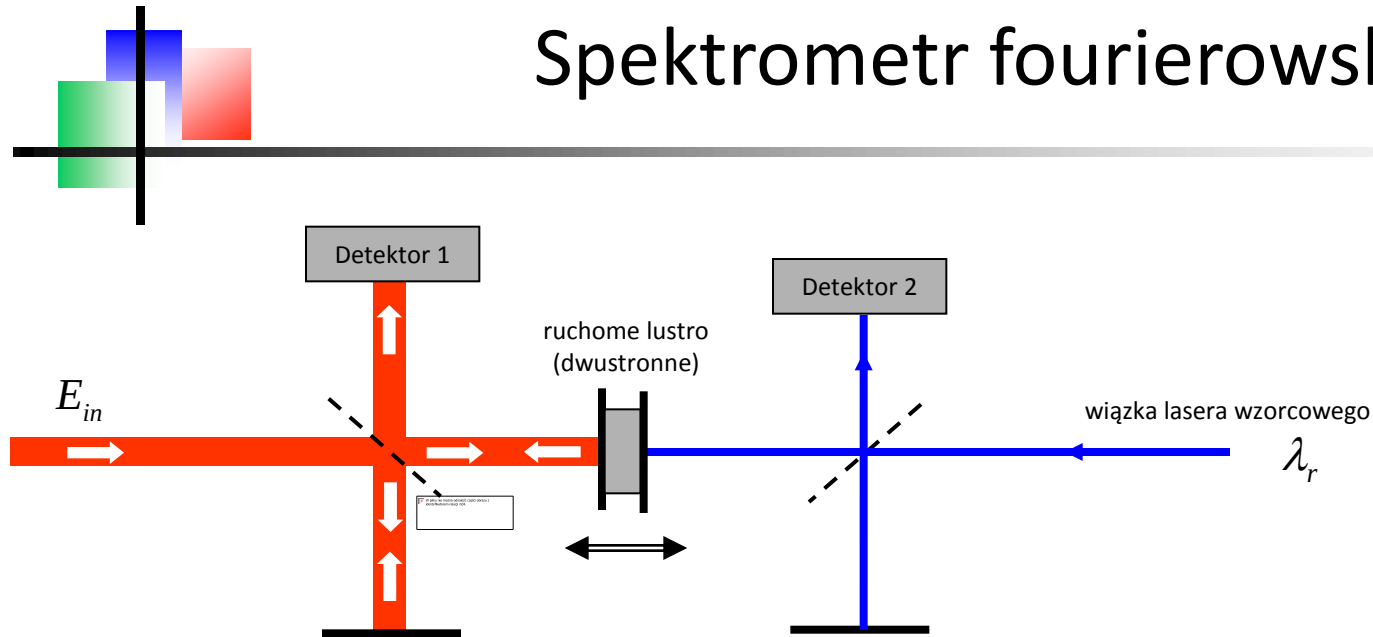
ostatecznie:

$$G(\tau) = 2I_{out} - I_{in}$$

Korzystamy z twierdzenia Wienera-Chinchina aby wyliczyć $I(\omega)$:

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

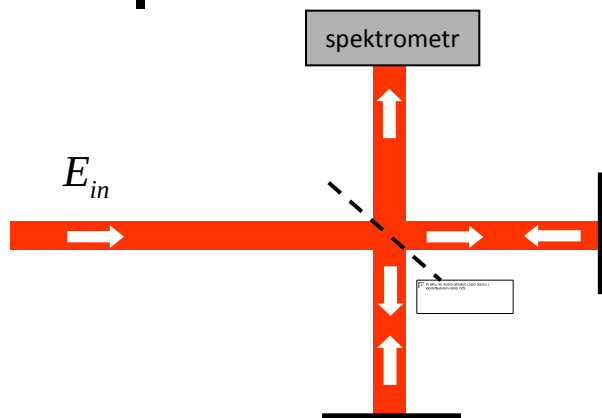
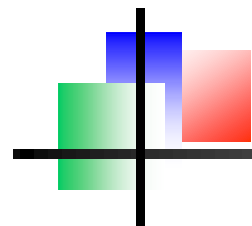
Spektrometr fourierowski



Procedura:

1. Przesuwamy lustro i rejestrujemy I_1 oraz I_2
2. z I_2 dostajemy opóźnienie τ
3. Liczymy $2I_{out} - I_{in}$
4. Z twierdzenia Wienera-Chinchina wyliczamy $I(\omega)$

Interferencja spektralna



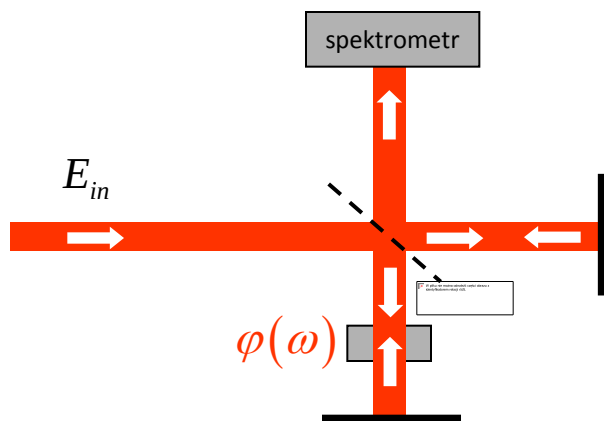
Na wyjściu interferometru mamy:

$$E_{out}(t, \tau) = \frac{1}{2} [E_{in}(t) + E_{in}(t + \tau)]$$

$$E_{out}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [E_{in}(t) + E_{in}(t + \tau)] e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2} E_{in}(\omega) (1 + e^{i\omega\tau})$$

Mierzymy widmo:

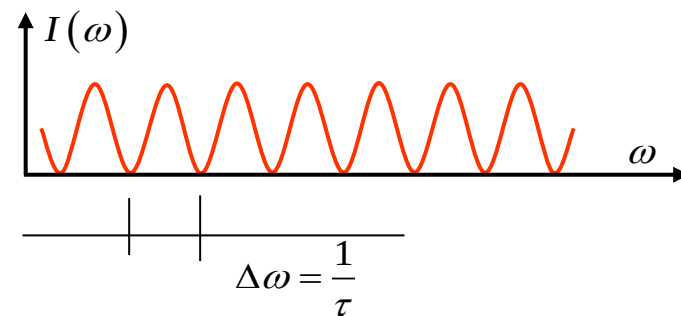
$$I_{out}(\omega) = |E_{out}(\omega)|^2 = I_{in}(\omega) [1 + \cos(\omega\tau)]$$



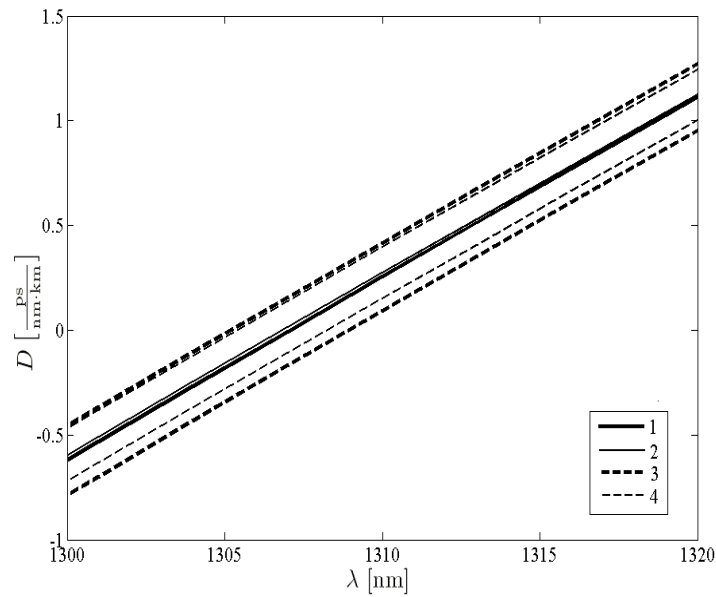
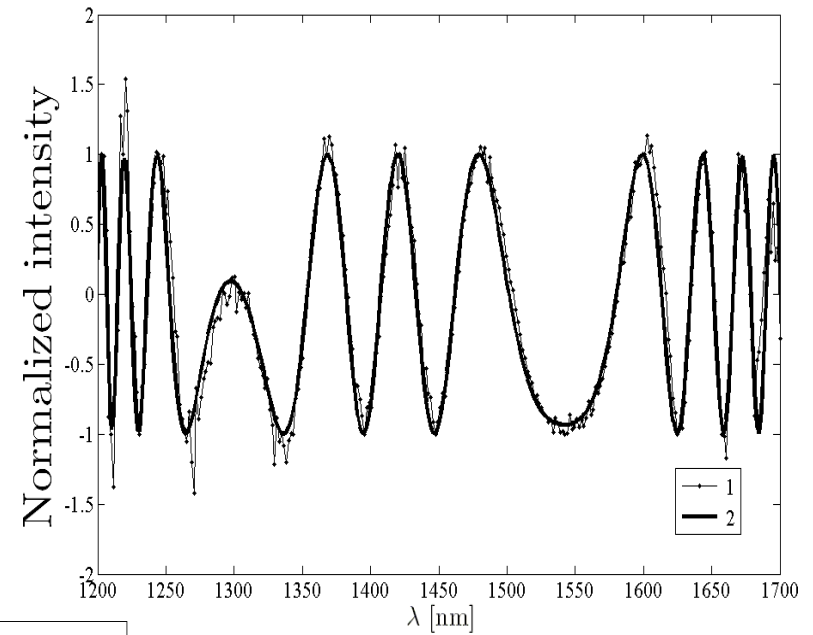
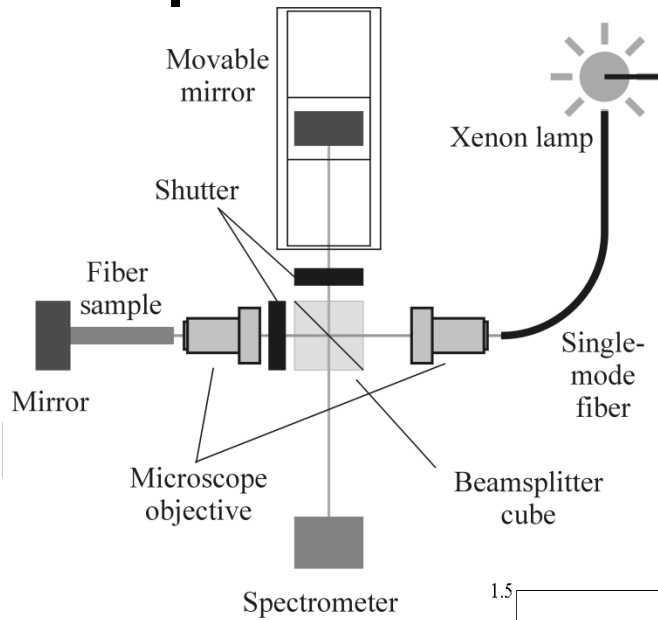
$$I_{out}(\omega)$$

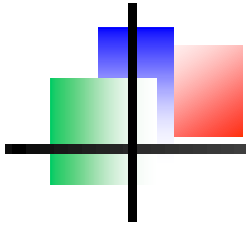


$$\varphi(\omega)$$

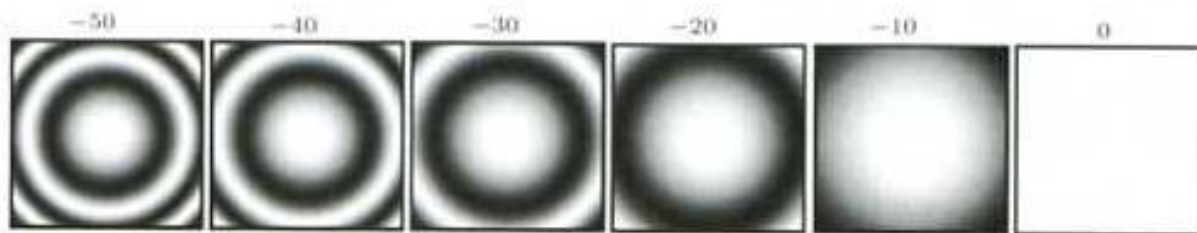
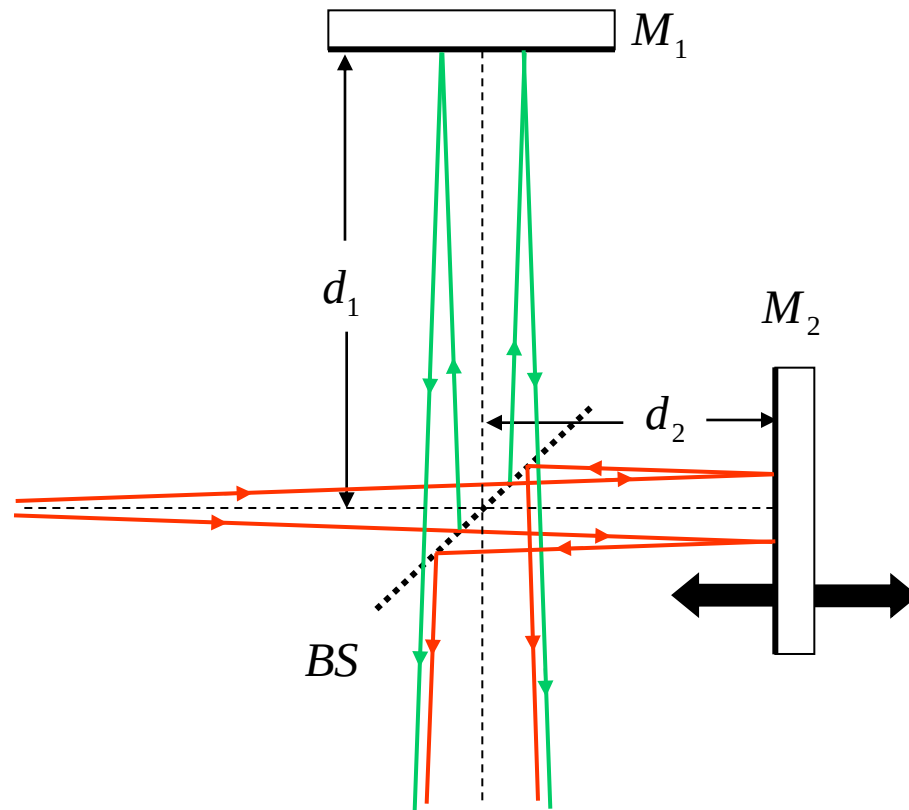


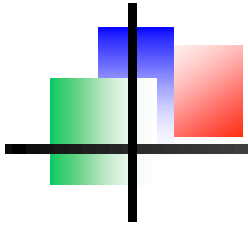
Interferencja spektralna, przykład



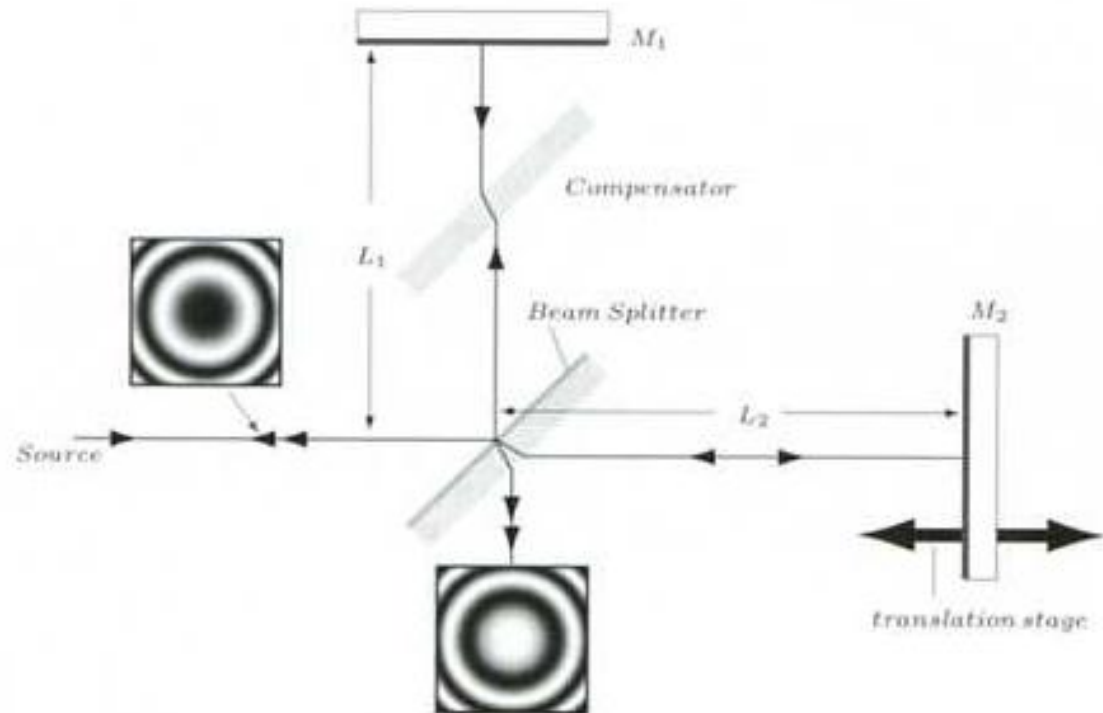


Int. Michelsona – rozbieżna wiązka

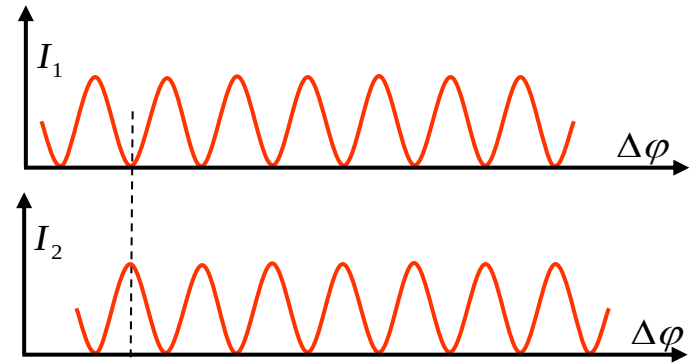
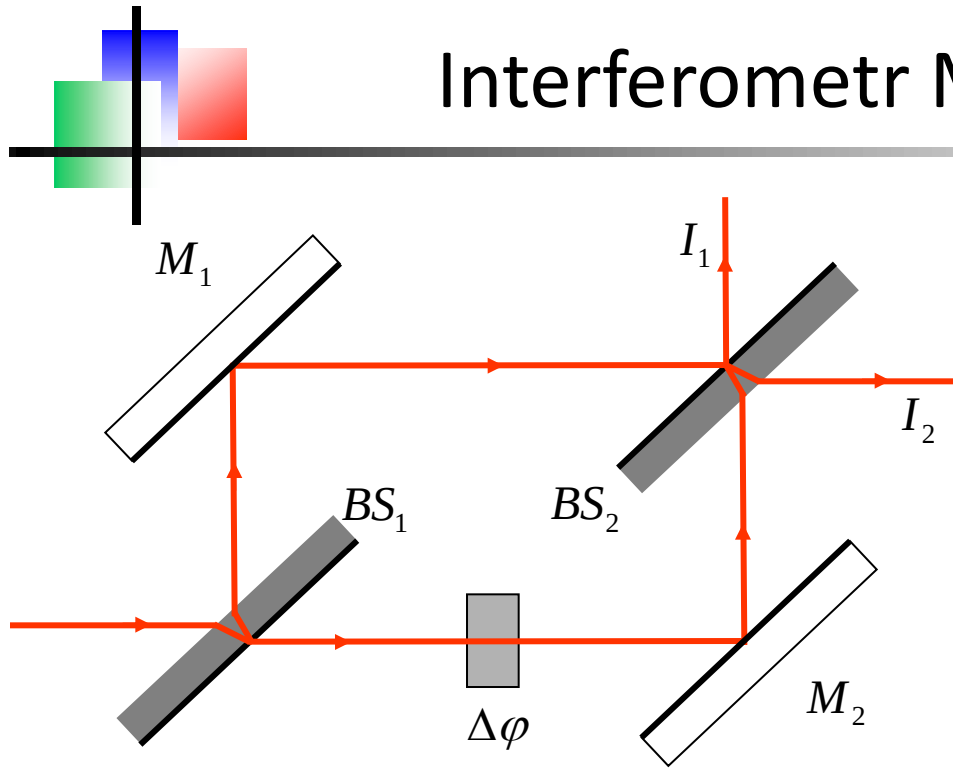


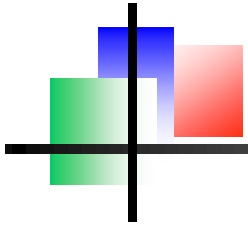


Int. Michelsona – zachowanie energii

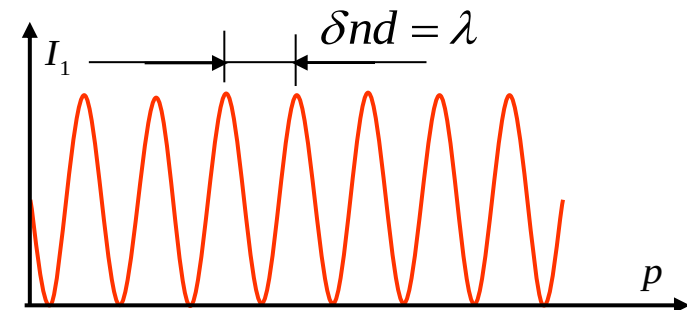
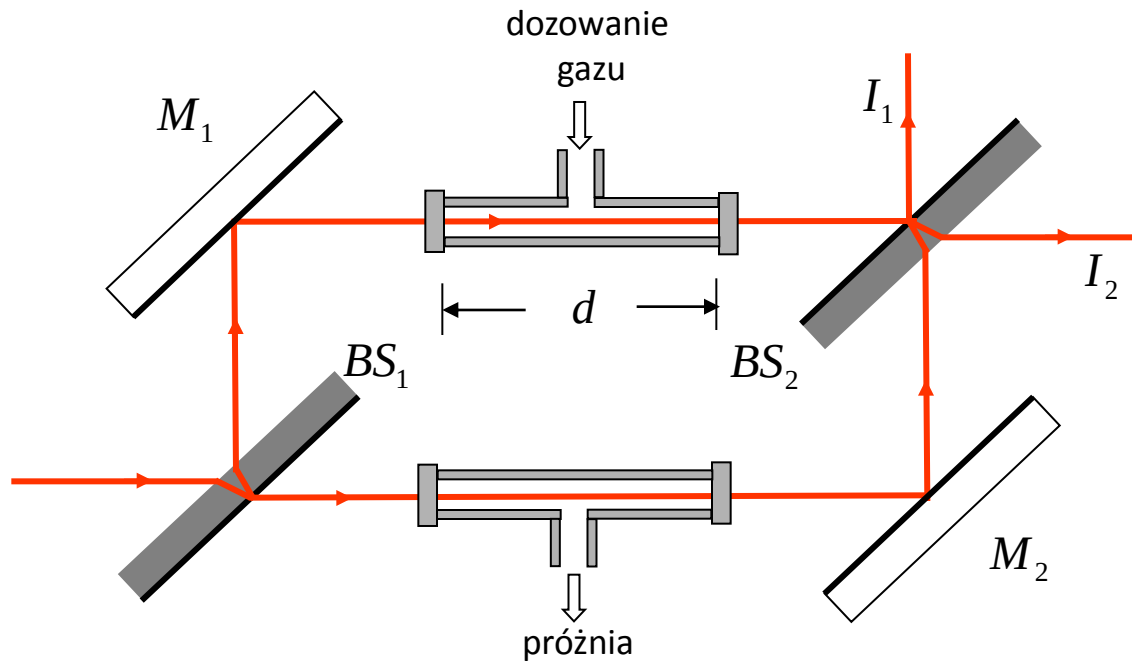


Interferometr Macha-Zehndera



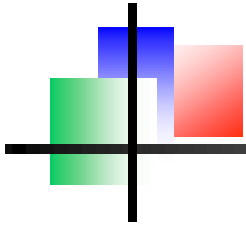


Interferometr Macha-Zehndera, pomiar n

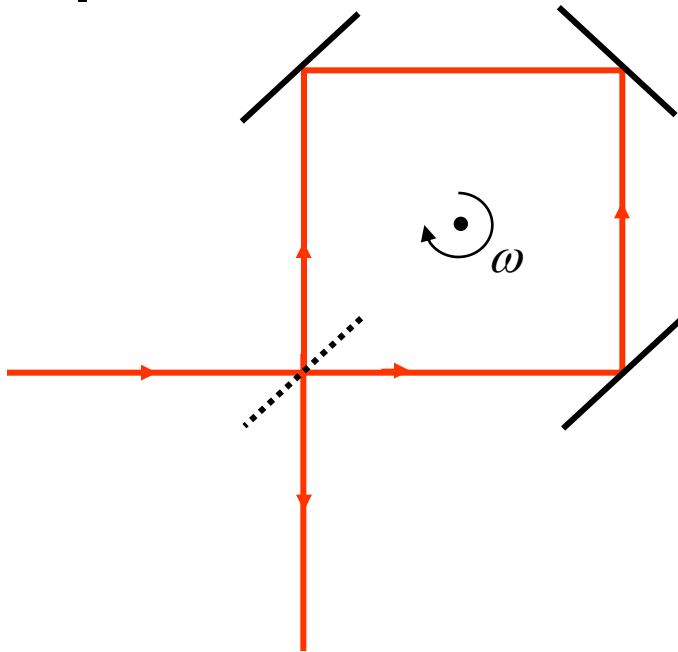


Pomiar rozkładów przestrzennych n :

- plazma
- gazy (przepływy)



Interferometr Sagnaca - żyroskop



$$\Delta N = \frac{4A\omega}{c\lambda}$$

$$\Delta N = \frac{4MA\omega}{c\lambda}$$

