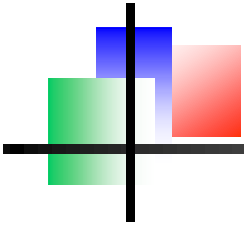


Podstawy Fizyki IV

Optyka z elementami fizyki współczesnej

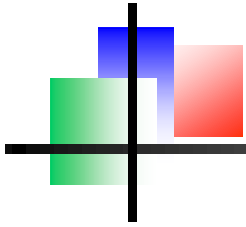
wykład 13, 26.03.2012

wykład:	Czesław Radzewicz
pokazy:	Radosław Chrapkiewicz, Filip Ozimek
ćwiczenia:	Ernest Grodner



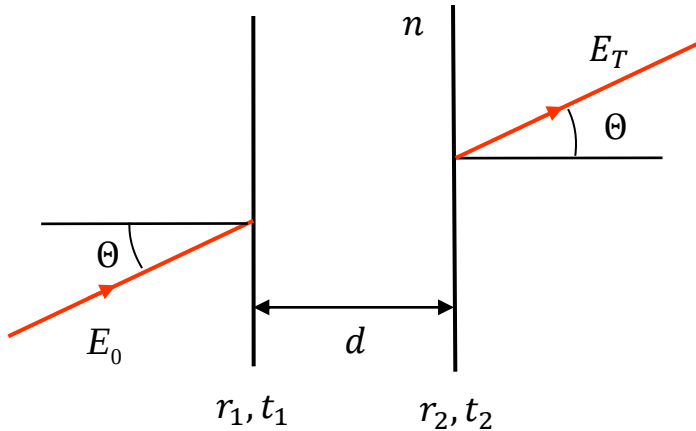
Wykład 12 - przypomnienie

- stosy warstw dielektrycznych
- macierz pojedynczej warstwy
- macierz stosu
- współczynnik odbicia
- warstwy ćwierćfalowe: pojedyncza, podwójna, wielokrotna
- stosy antyrefleksyjne, lustra dielektryczne
- lustra dichroiczne, polaryzatory cienkowarstwowe
- wytwarzanie pokryć dielektrycznych



Interferometr Fabry-Perot, 2

$$E_T = \frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2 e^{i\delta}} E_0$$



1. Współczynniki obicia i transmisji dla luster mogą być zespolone

$$r_1 = |r_1| e^{i\delta_1}, r_2 = |r_2| e^{i\delta_2}$$

$$r_1 r_2 = |r_1 r_2| e^{i(\delta_1 + \delta_2)}$$

2. Współczynnik załamania może być zespolony (wykład 3)

$$n = n_R + n_I$$

$$\delta = \frac{4\pi n}{\lambda} d \cos \Theta = \frac{4\pi n_R}{\lambda} d \cos \Theta + i \frac{4\pi n_I}{\lambda} d \cos \Theta = \delta_R + \delta_I$$

Nowe oznaczenia:

$$t_1 t_2 = |t_1 t_2| e^{i\delta_T} = T e^{i\delta_T}$$

$$r_1 r_2 = r_2 = |r_1 r_2| e^{-\delta_I} e^{i(\delta_R + \delta_1 + \delta_2)} = R e^{i\Delta}$$

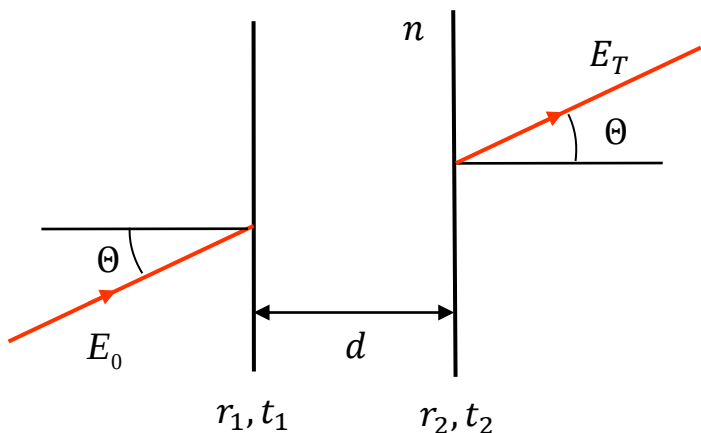
pozwalają zapisać pole fali przechodzącej

$$E_T = \frac{T e^{i\delta_T}}{1 - R e^{i\Delta}} E_0$$

oraz jej natężenie

$$I_T = |E_T|^2 = \left| \frac{T e^{i\delta_T}}{1 - R e^{i\Delta}} E_0 \right|^2 = I_0 \frac{T^2}{|1 - R e^{i\Delta}|^2}$$

Interferometr Fabry-Perot, 3



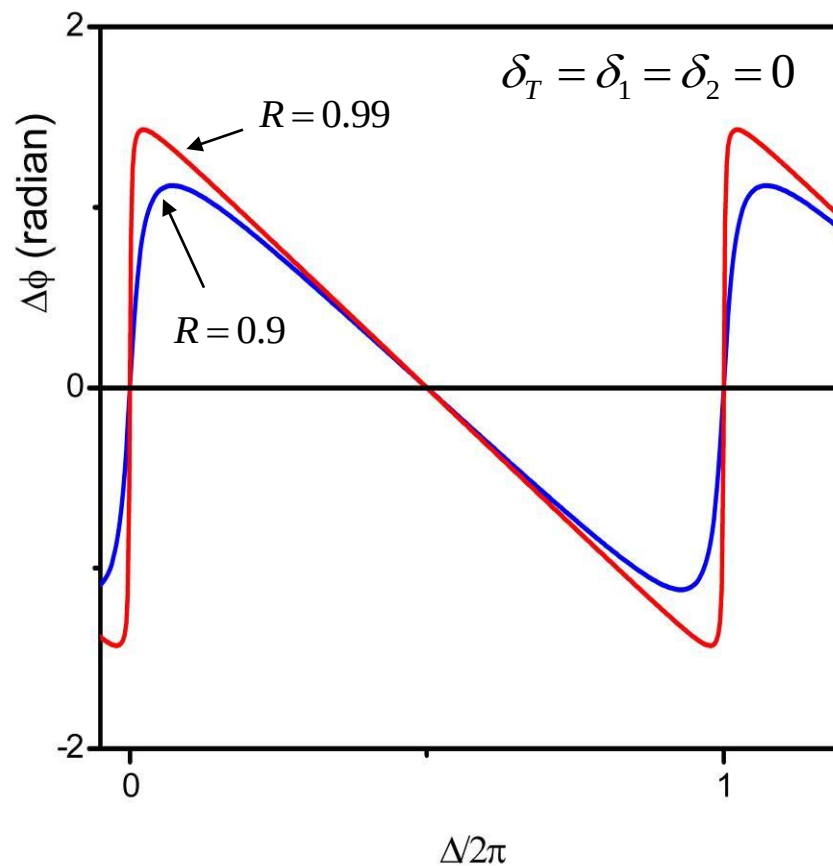
faza fali odbitej ...

Fazę fali przechodzącej liczymy z wyrażenia

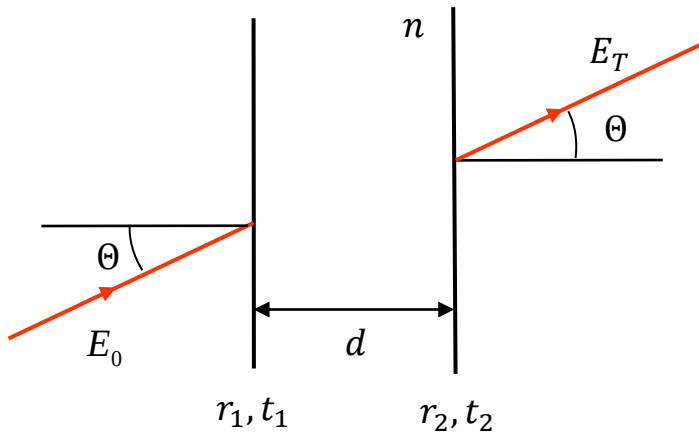
$$E_T = \frac{T e^{i\delta_T}}{1 - R e^{i\Delta}} E_0,$$

z parametrami

$$R = |r_1 r_2| e^{-\delta_I}, \Delta = \delta_R + \delta_1 + \delta_2$$



Interferometr Fabry-Perot, 4



Natężenie fali przechodzącej przez interferometr F-P

$$I_T = |E_T|^2 = I_0 \frac{T^2}{|1 - Re^{i\Delta}|^2}$$

najpierw liczymy mianownik

$$\begin{aligned} |1 - Re^{i\Delta}|^2 &= (1 - Re^{i\Delta})(1 - Re^{-i\Delta}) = \\ &= 1 - 2R \cos \Delta + R^2 = \\ &= (1 - R)^2 \left[1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \frac{\Delta}{2} \right] \end{aligned}$$

wprowadzamy: **współczynnik dobroci**

$$F = \frac{4R}{(1 - R)^2}$$

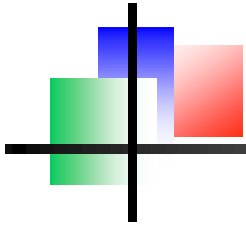
Transmisja (natężenia) przez interferometr F-P

$$T_{F-P} = \frac{I_T}{I_0} = \frac{T^2}{(1 - R)^2} \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\Delta}{2}}$$

$$T = |t_1 t_2|$$

$$R = |r_1 r_2| e^{-\delta_I}$$

$$\Delta = \delta_R + \delta_1 + \delta_2$$



Interferometr Fabry-Perot, 5

$$T_{F-P} = \frac{I_T}{I_0} = \frac{T^2}{(1-R)^2} \frac{1}{1+F\sin^2\frac{\Delta}{2}}$$

$$T_{max} = \frac{T^2}{(1-R)^2}$$

W interferometrze bez strat: $n_I = 0$ oraz $T = 1 - R$
co daje $T_{max} = 1$.

Bez absorpcji w ośrodku ale straty na lustrach (identycznych)

$$T + R + A = 1, T = |t_1|^2, R = |r_1|^2$$

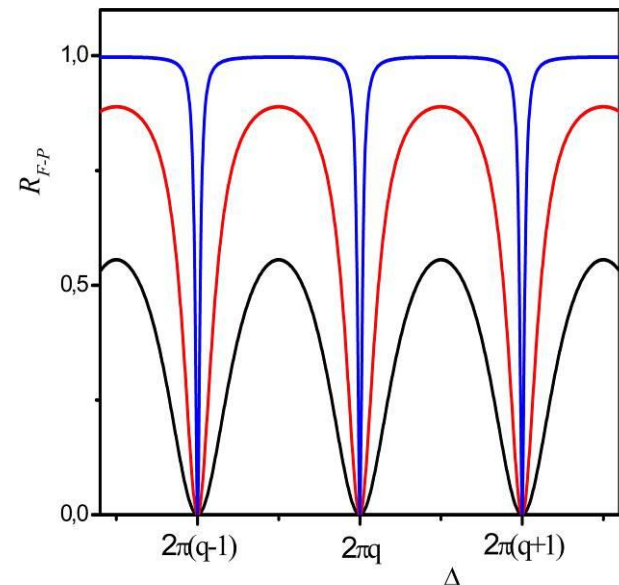
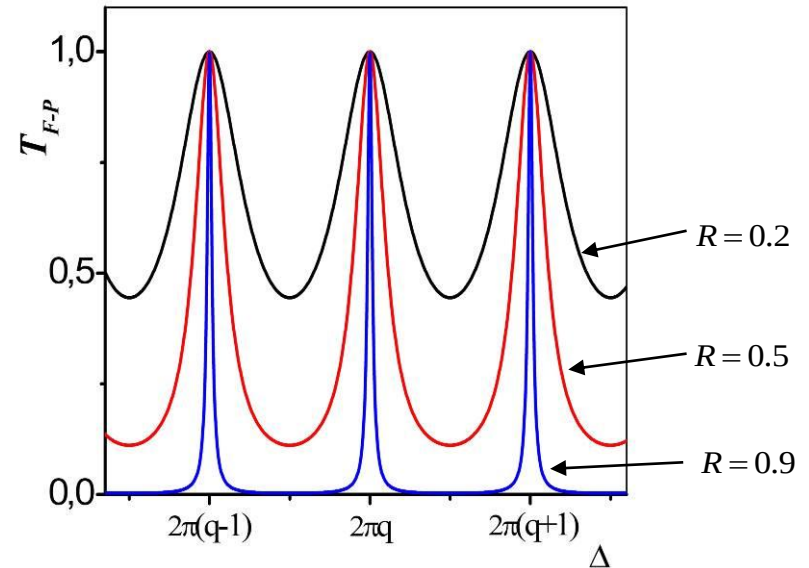
$$T_{max} = \frac{(1 - R - A)^2}{(1 - R)^2} = \left(1 - \frac{A}{1 - R}\right)^2 < 1$$

Bezstratne lustra (identyczne) ale absorpcja w ośrodku

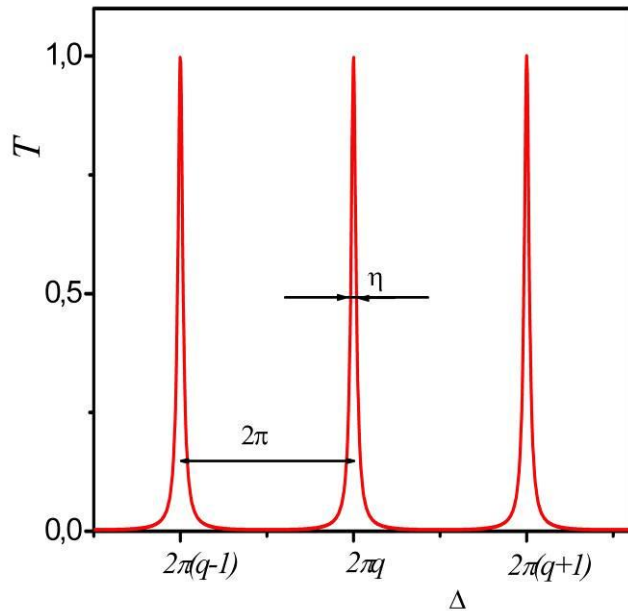
$$T_{max} = \frac{T^2}{(1 - Re^{-\delta_I})^2} = \left(\frac{1-R}{1 - Re^{-\delta_I}}\right)^2 < 1$$

tłumienie poza rezonansem

$$T_{min} = \frac{T_{max}}{1+F} \cong \frac{T_{max}}{F}$$



Interferometr Fabry-Perot, finesse



$$T_{F-P} = \frac{T^2}{(1-R)^2} \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\Delta}{2}}$$

Liczmy szerokość połówkową piku:

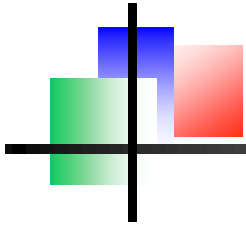
$$\frac{T(q2\pi + \eta/2)}{T_{max}} = \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{q2\pi + \eta/2}{2}} = \frac{1}{2}$$

zakładając $\eta \ll \pi$

plus rachunki

$$\eta = \frac{1(1-R)}{\sqrt{R}} = \frac{2\pi}{\mathcal{F}}$$

$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$ to **finesse (dobroć, doskonałość)** interferometru



Interferometr Fabry-Perot, 6

$$T_{F-P} = \frac{T^2}{(1-R)^2} \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\Delta}{2}}$$

Częstości rezonansowe F-P zależą od parametru Δ :

$$\Delta = \delta_R + \delta_1 + \delta_2 = \frac{2n\omega}{c} d \cos \Theta + \delta_1 + \delta_2$$

przyjmując: $\delta_1 = \delta_2 = 0$ oraz $\Theta = 0$ mamy

$$\Delta = \frac{2n\omega}{c} d$$

Maksima transmisji (częstości rezonansowe F-P) możemy indeksować liczbą naturalną q

$$\frac{\Delta}{2} = q\pi$$

co daje

$$\omega_q = q \frac{c\pi}{nd}$$

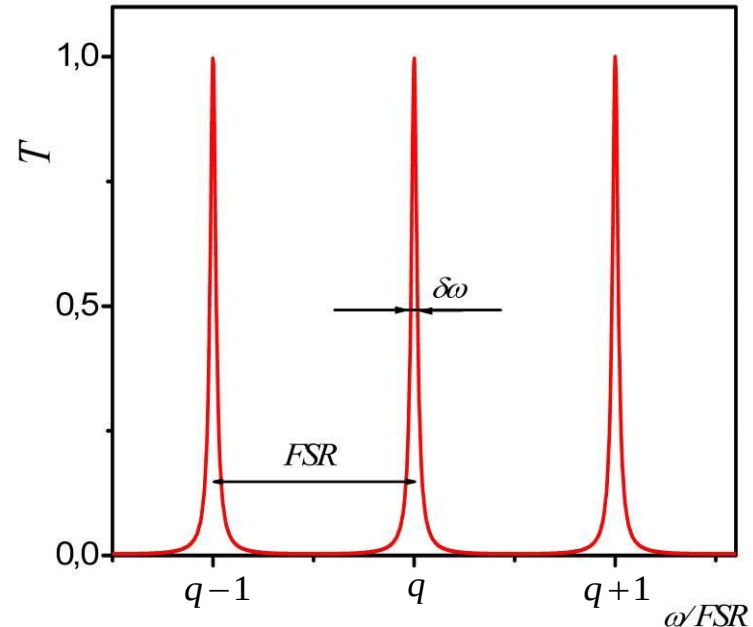
Oznaczmy przez FSR odległość pomiędzy kolejnymi maksimami: $FSR = \omega_{q+1} - \omega_q$

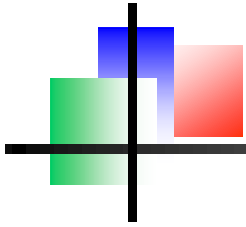
Wtedy szerokość połówkowa pików to

$$\delta\omega = \frac{FSR}{\mathcal{F}}$$

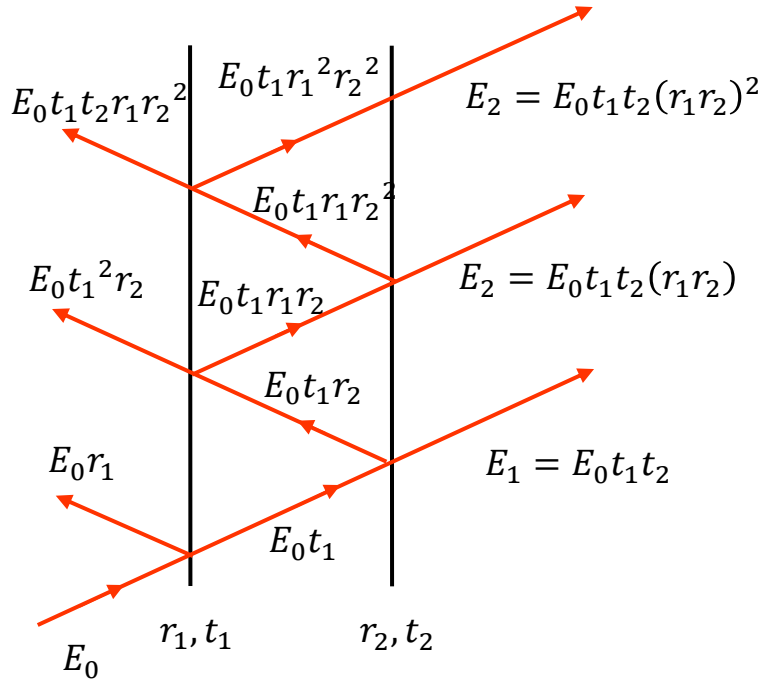
FSR (ang. Free Spectral Range) –

przedział dyspersji (interferometru)





Interferometr Fabry-Perot, 7



Rozważamy dobry, symetryczny ($r_1 = r_2$) interferometr Fabry-Perot

$$R \cong 1, T = 1 - R$$

Oznaczmy przez E_{ins} pole wewnątrz interferometru propagujące się w prawo. Weźmy jego amplitudę tuż przed 2. lustrem. Mamy wtedy

$$E_T = t_2 E_{ins}$$

$$I_T = |t_2|^2 I_{ins}$$

Zatem

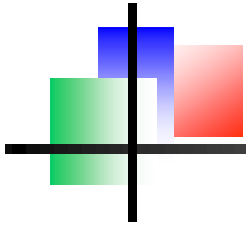
$$I_{ins} = \frac{I_T}{1 - R} = \frac{\mathcal{F} I_T}{\pi \sqrt{R}} \cong \frac{\mathcal{F}}{\pi} I_T$$

Dla rezonansu mamy $I_T \cong I_0$

Zatem

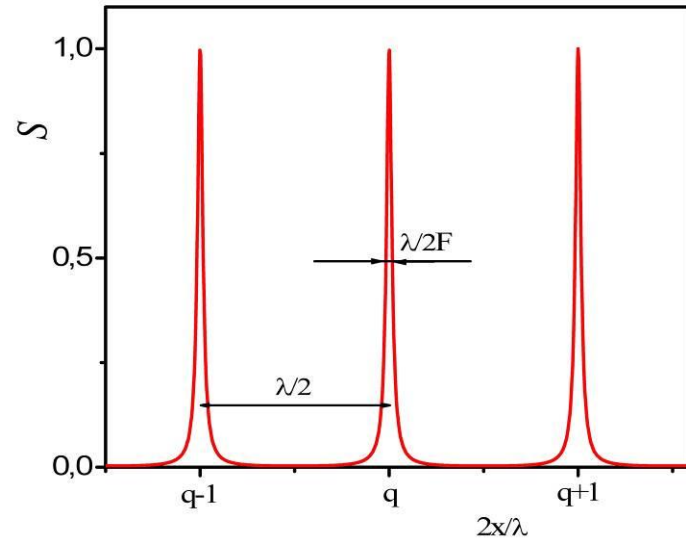
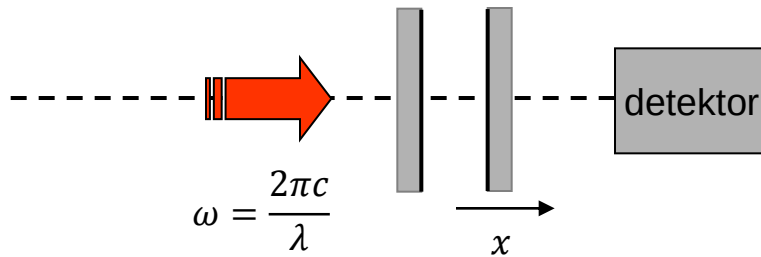
$$I_{ins} \cong \frac{\mathcal{F}}{\pi} I_0$$

Natężenie światła w rezonatorze może być bardzo duże

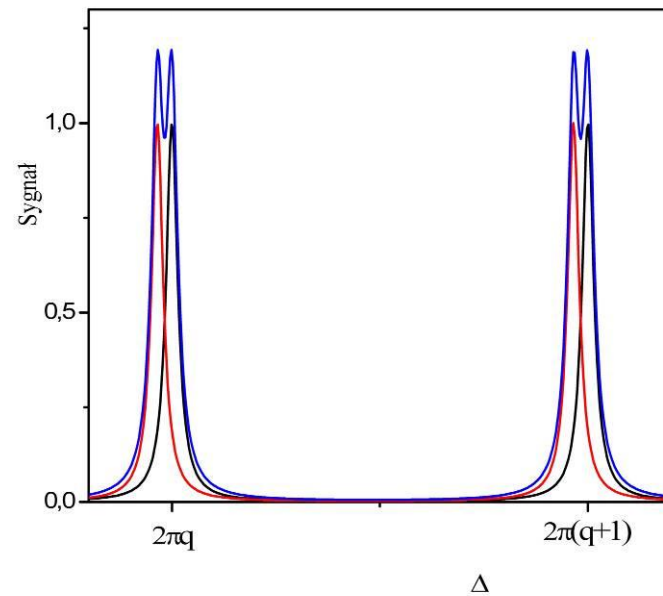
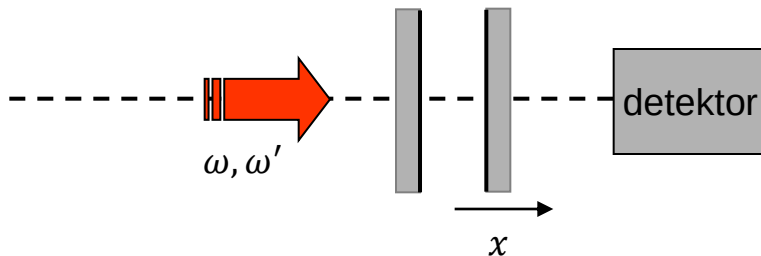


Skanujący int. Fabry-Perot

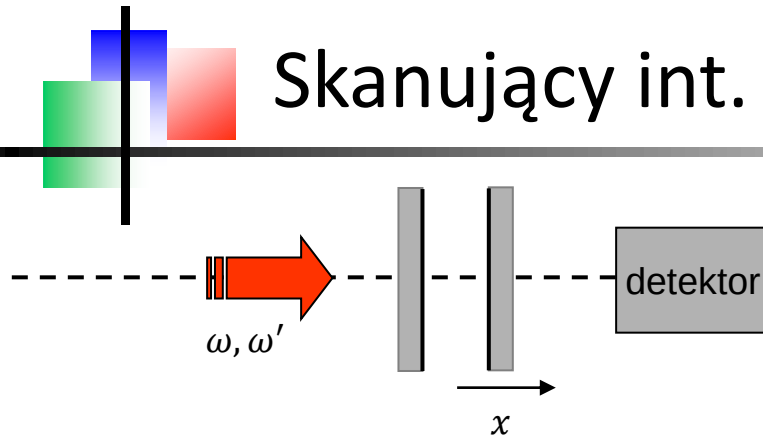
jedna fala monochromatyczna



2 fale monochromatyczne



Skanujący int. Fabry-Perot, rozdzielczość



$$\Delta = \delta_1 + \delta_2 + 2 \frac{n\omega d}{c}$$

$$\Delta' = \delta_1 + \delta_2 + 2 \frac{n\omega' d}{c}$$

Kryterium Taylora – krzywe przecinają się w połowie wysokości:

$$\frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{q2\pi + \chi/2}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\chi = \frac{2\pi}{\mathcal{F}}$$

Korzystamy z definicji finesse żeby wyliczyć: $\chi = \frac{2\pi}{\mathcal{F}}$

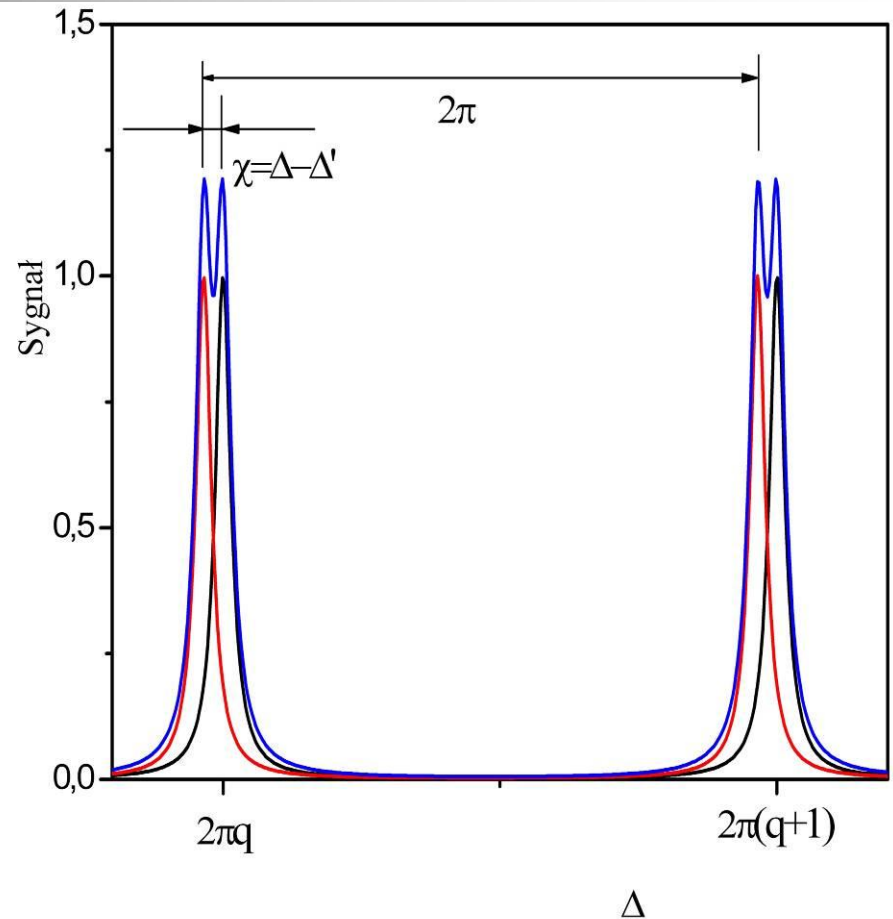
minimalna różnica częstotliwości,

które możemy odróżnić:

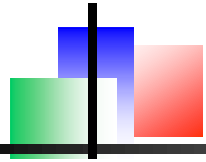
(rozdzielczość int. F-P)

$$\omega - \omega' = \frac{FSR}{\mathcal{F}}$$

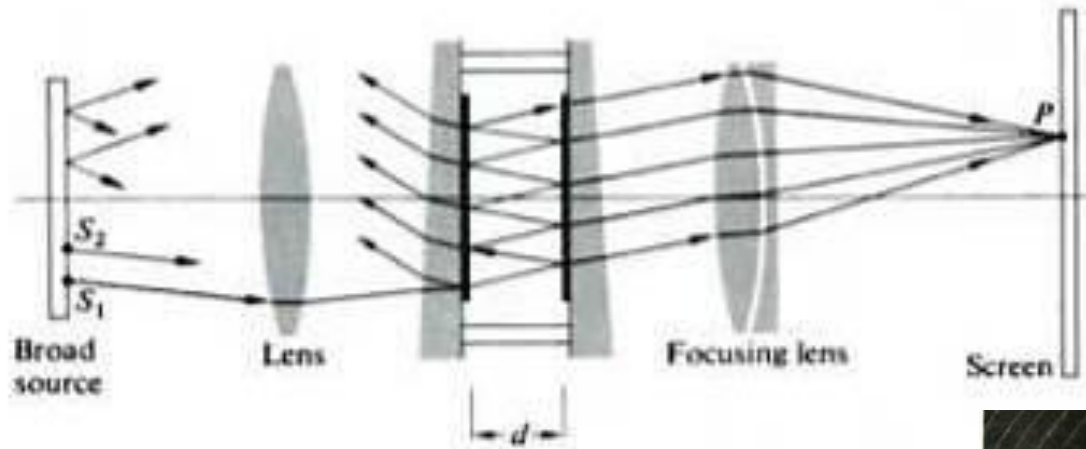
Zdolność rozdzielcza: $\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\omega}{\delta\omega} = q\mathcal{F}$



Maksymalna szerokość widma = FSR



Int. Fabry-Perot, prążki stałego nachylenia, 1



światło monochromatyczne
wiązka rozproszona

średnica pierścienia ϕ
 $\phi/2 = f \tan \Theta \cong f\Theta$

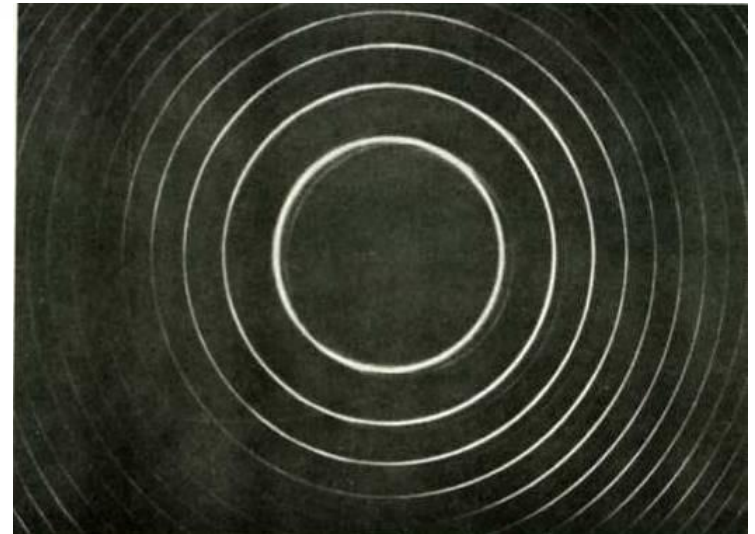
Dla małych kątów

$$\Delta = \delta_1 + \delta_2 + 2 \frac{n\omega d}{c} \cos \Theta \cong$$

$$\cong 2 \frac{n\omega d}{c} \left(1 - \frac{\Theta^2}{2}\right) = q2\pi$$

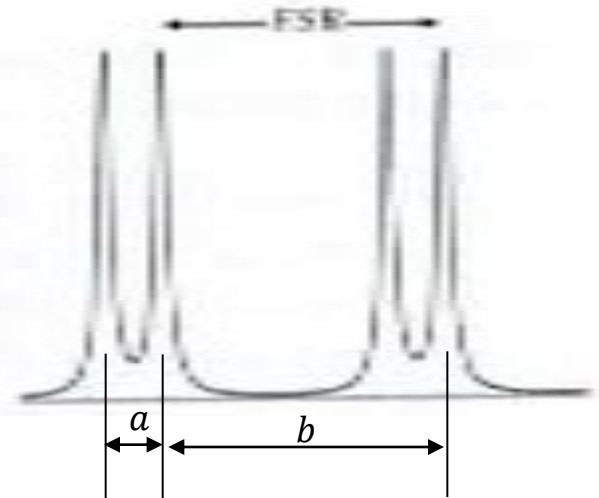
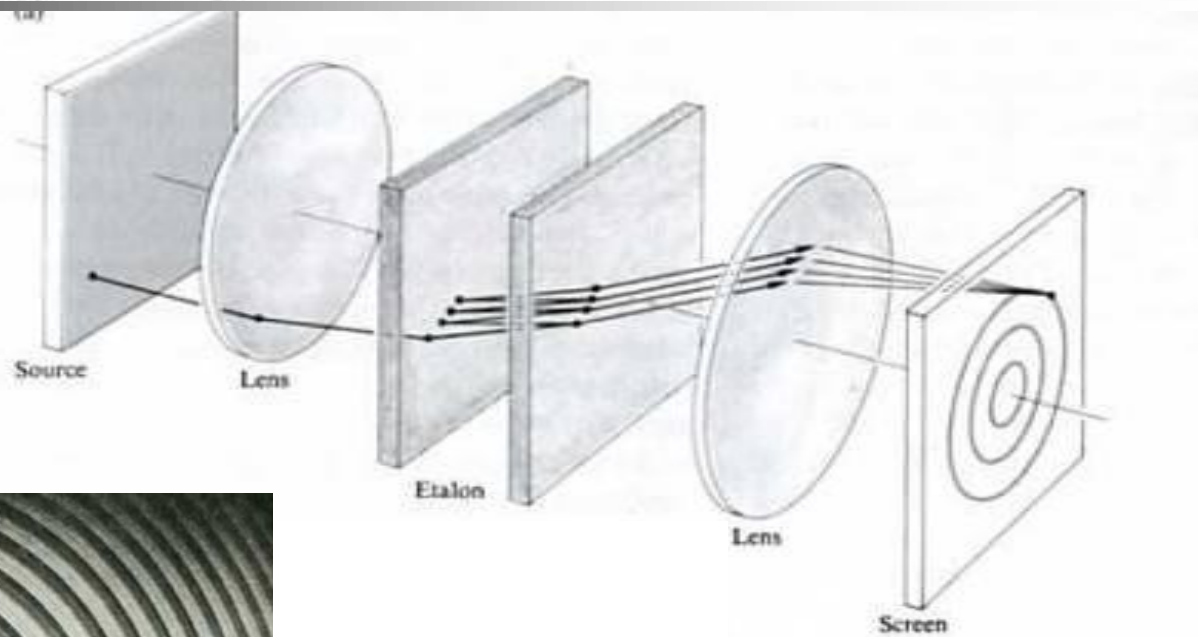
stąd

$$\Theta_q = \sqrt{2 \left(1 - q \frac{\pi c}{n\omega d}\right)}$$

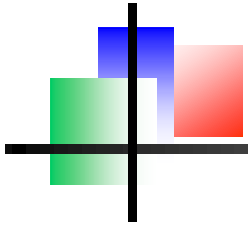


najmniejszy pierścień znajdujemy z warunku: $q_0 < \frac{n\omega d}{\pi c}$
kolejne pierścienie odpowiadają coraz mniejszym wartościom q

Int. Fabry-Perot, prążki stałego nachylenia, 2

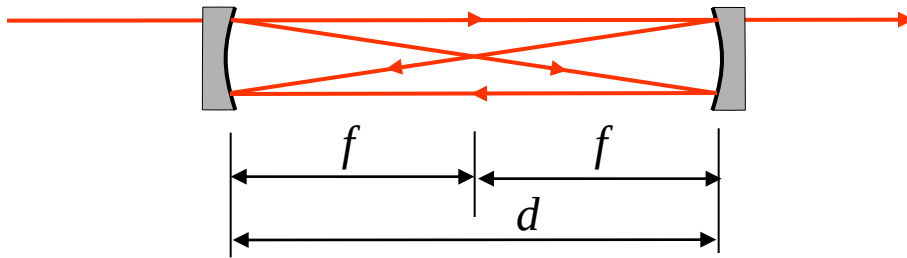


$$\delta\omega = \frac{a}{b} FSR$$



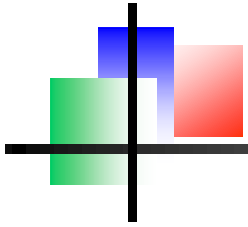
Interferometry Fabry-Perot, lustra sferyczne

Konfokalny interferometr F-P.



$$FSR = \frac{c}{4nd}$$

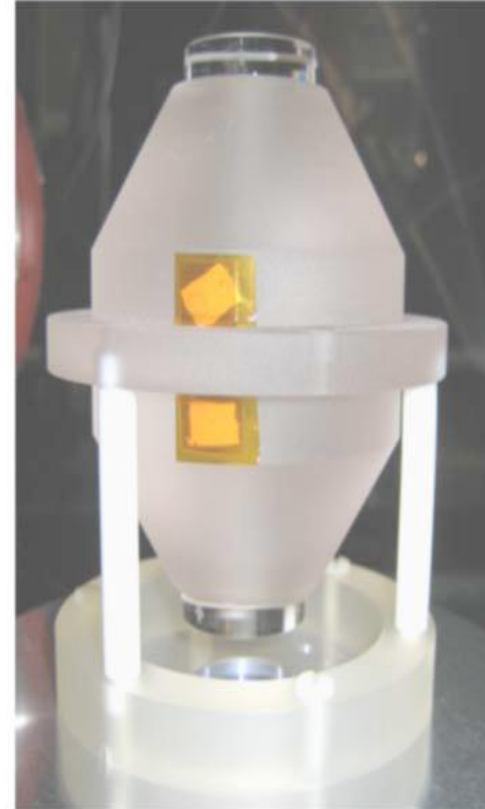
mody interferometru F-P



Rzeczywiste interferometry Fabry-Perot

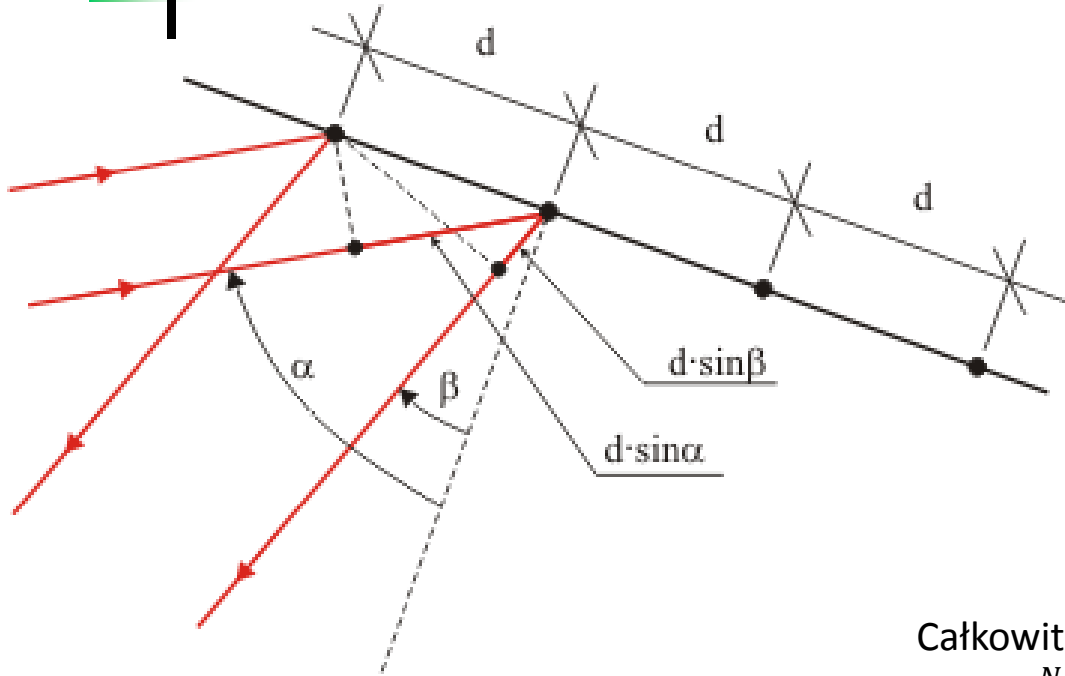
Ograniczenia na finesse:

1. Dokładność powierzchni: płaskiej bądź sferycznej
2. Dokładność ustawienia
3. Jakość luster (R)



$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} \cong 3 \times 10^5 \Leftrightarrow R = 0.99999$$

Siatka dyfrakcyjna, 1



Siatka dyfrakcyjna - N identycznych rys;
każda z nich jest źródłem fali

$$E_n = E_0 e^{in\Delta\varphi}$$

Pod kątem α pada fala płaska
monochromatyczna. Obserwujemy światło
pod kątem β .

geometria:

$$\delta = k\Delta l = kd(\sin \alpha + \sin \beta)$$

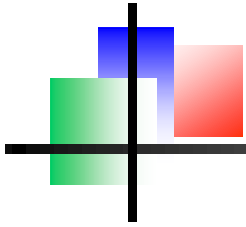
Całkowite pole to:

$$E = \sum_{n=0}^N E_n = E_0 \sum_{n=0}^N e^{in\delta} = \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}} E_0$$

a natężenie

$$I = |E|^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} I_0$$

gdzie I_0 to natężenie światła od jednej rysy



Siatka dyfrakcyjna, 2

$$I = \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} I_0$$

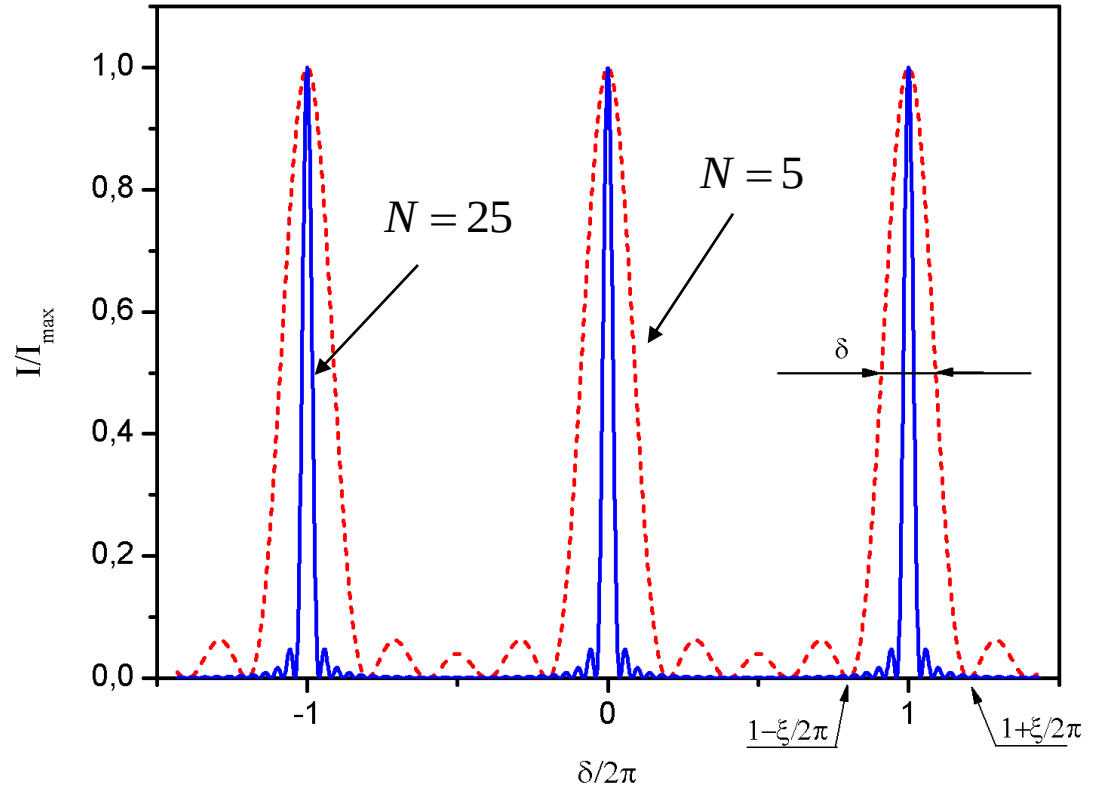
Maksima dla:

$$\delta/2 = m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\frac{kd(\sin \alpha + \sin \beta)}{2} = m\pi$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = m \frac{\lambda}{d}$$

indeks m numeruje rzędy ugięcia



Dyspersja kątowa siatki dyfrakcyjnej:

$$\frac{d}{d\lambda} (\sin \alpha + \sin \beta) = \frac{m}{d}$$

$$\frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \beta}$$

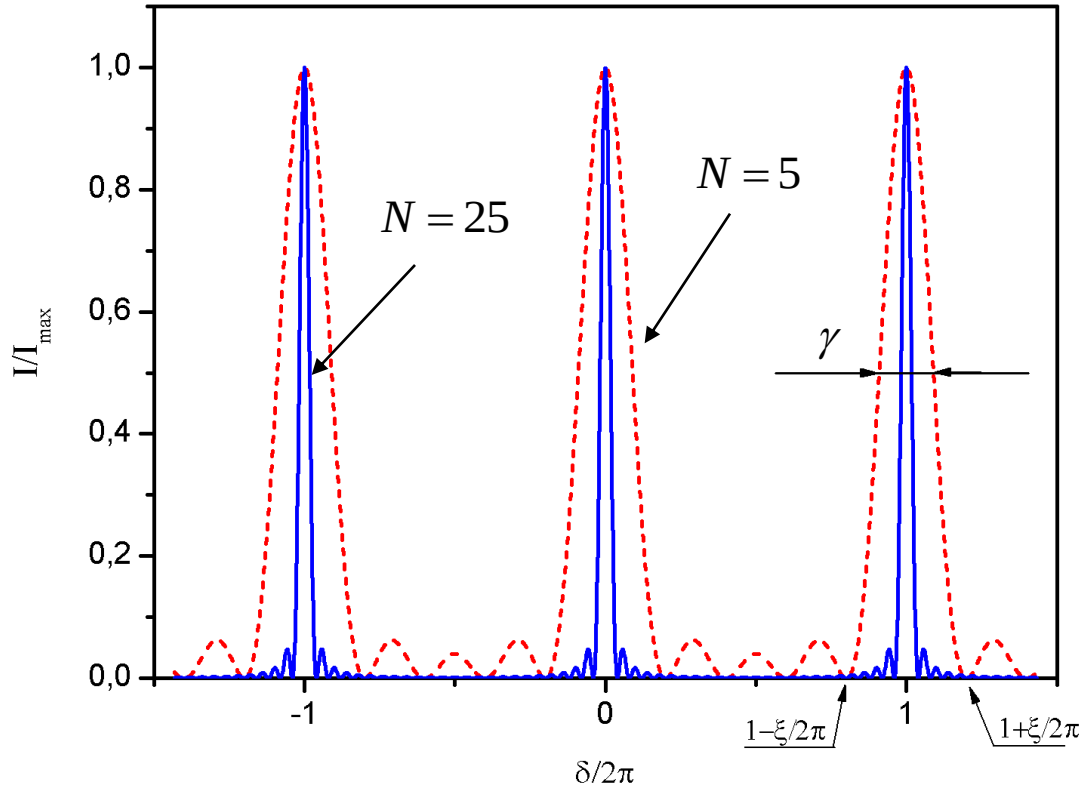
Siatka dyfrakcyjna, 3

$$I = \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} I_0$$

Szerokość maksimum – szukamy 1. zera
w 1. rzędzie ugięcia

$$I(2\pi + \xi) = 0$$
$$\sin\left(N\pi + \frac{N\xi}{2}\right)$$
$$\xi = \frac{2\pi}{N}$$

Przyjmijmy $\gamma \cong \xi$



$$\frac{2\pi}{\gamma} = N$$

Siatka dyfrakcyjna, 4

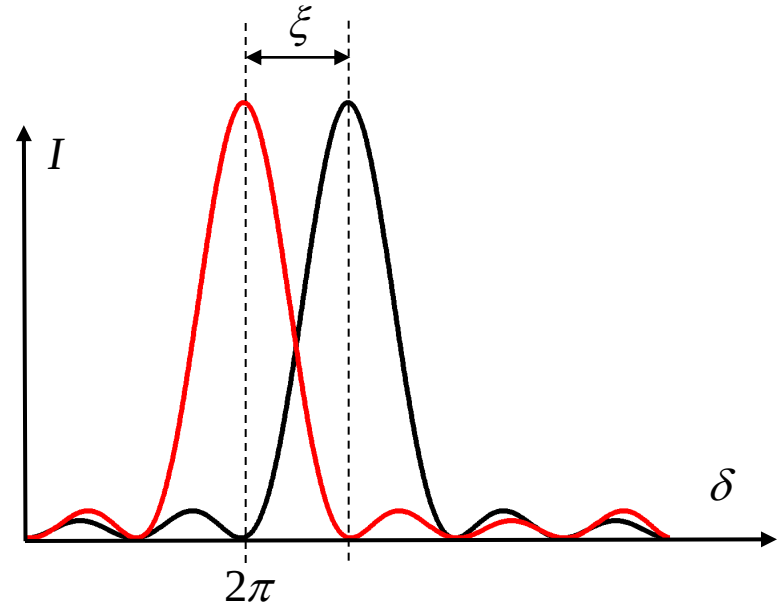
$$I = \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} I_0$$

$$\delta = \frac{\omega d}{c} (\sin \alpha + \sin \beta) = m2\pi$$

$$\delta' = \frac{\omega' d}{c} (\sin \alpha + \sin \beta) = m2\pi + \zeta$$

Stosujemy kryterium Rayleigha: maksimum jednej linii pokrywa się z pierwszym minimum drugiej

$$\omega = \frac{m2\pi cd}{(\sin \alpha + \sin \beta)}$$
$$\omega' = \frac{(m2\pi + \zeta)cd}{(\sin \alpha + \sin \beta)}$$

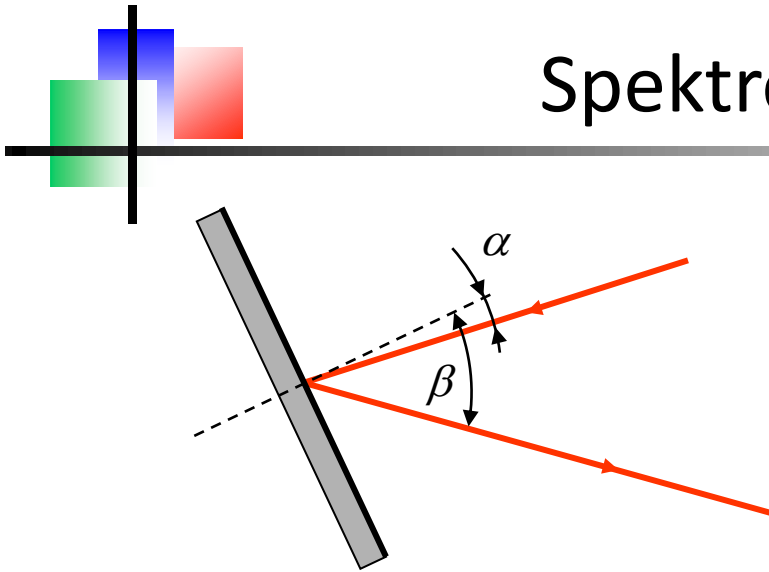


$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{\omega' - \omega}{\omega} = \frac{\zeta}{m2\pi} = \frac{1}{mN}$$

rozdzielczość siatki dyfrakcyjnej

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$$

Spektrometr siatkowy



Jak ustalić α ?

Szczelina wejściowa + kolimator

Jak rozdzielić różne β ?

Ogniskowanie – dalekie pole

spektrometr
siatkowy

$$\sin \beta = m \frac{\lambda}{d} - \sin \alpha$$

$$\frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \beta}$$

Parametry:

Dispersja liniowa:

mm/nm

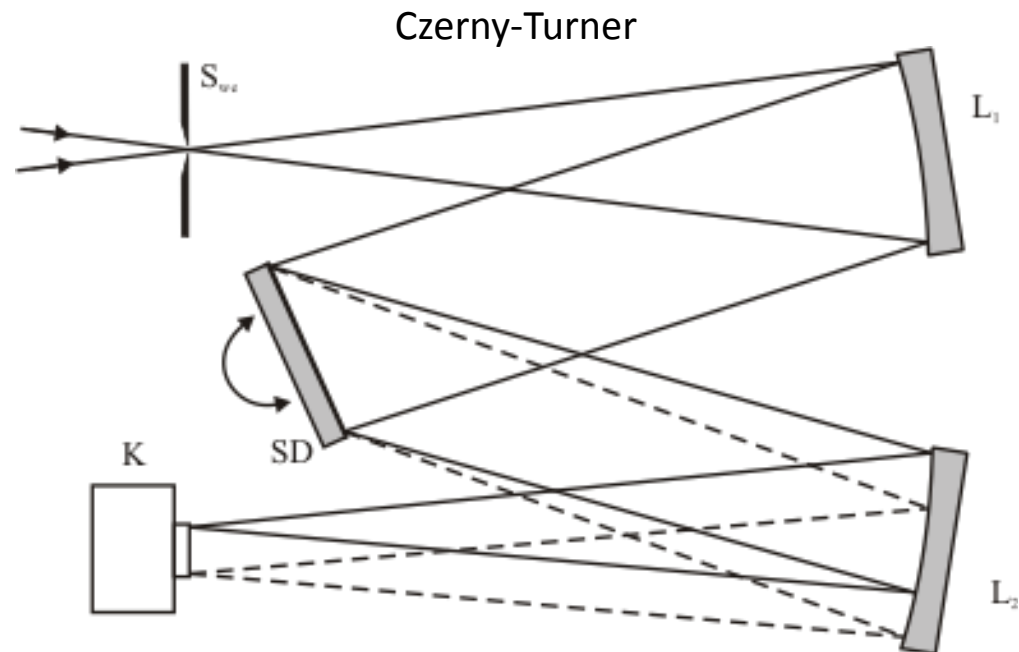
Rozdzielczość

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN$$

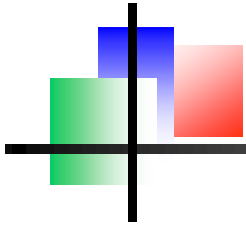
Jasność

a/f

Przedział spektralny (FSR)



jakość obrazowania



Dyspersja kątowna pryzmatów, 1

geometria:

$$\phi_1 + \phi_2 = \varepsilon + \alpha$$

$$\psi_1 + \psi_2 = \alpha$$

plus prawo Snella

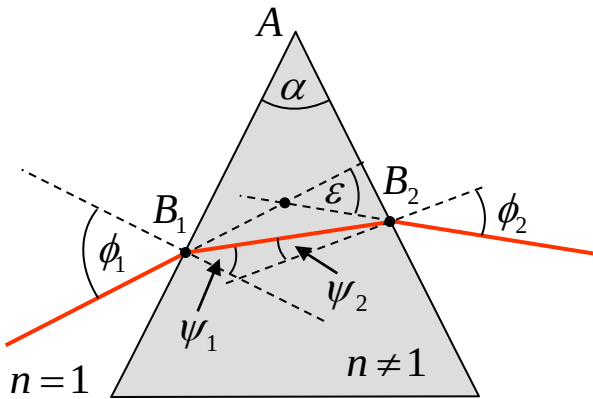
$$\sin \phi_1 = n \sin \psi_1$$

$$\sin \phi_2 = n \sin \psi_2$$

plus brutalna siła

$$\varepsilon = \phi_1 + \phi_2 - \alpha, \phi_2 = \sin^{-1}(n \sin \psi_2),$$

$$\psi_2 = \alpha - \phi_1, \phi_1 = \sin^{-1}\left(\frac{\sin \phi_1}{n}\right)$$



metoda ekstremalnego odchylenia – szukamy $\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = 0$

rachunki $\phi_1 = \phi_2, \psi_1 = \psi_2, \frac{d^2\varepsilon}{d\lambda^2} > 0$ - **kąt minimalnego odchylenia (ugięcia)**

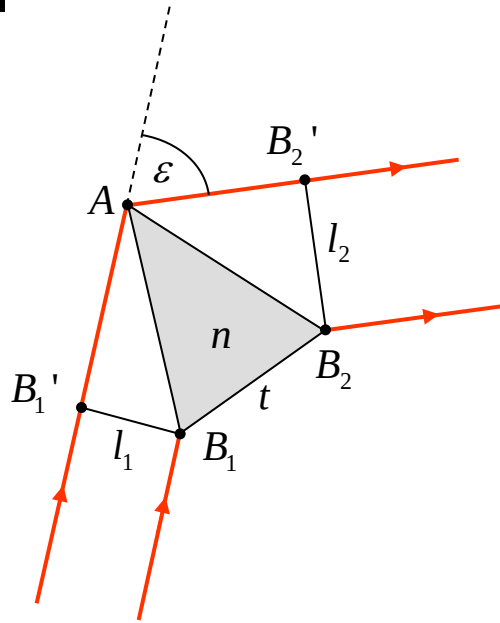
dla minimalnego odchylenia:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{min} + \alpha)$$

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\alpha$$

pomiar współczynnika złamania: $n = \frac{\sin \phi_1}{\sin \psi_1} = \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon_{min} + \alpha}{2}\right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$

Dyspersja kąтова pryzmatów, 2

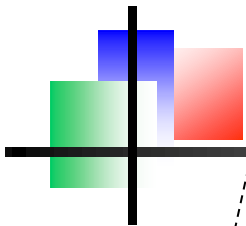


dyspersja współczynnika załamania $n = n(\lambda)$ skutkuje kątem ugięcia zależnym od długości fali $\varepsilon = \varepsilon(\lambda)$
Mówimy o **dyspersji kątowej pryzmatu**

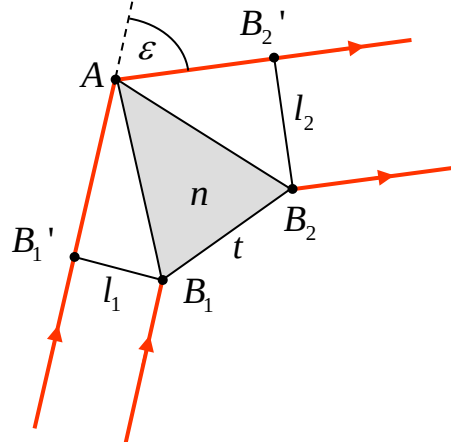
$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{d\varepsilon}{dn} \frac{dn}{d\lambda}$$

Niezbyt trudne ale bardzo żmudne rachunki dają:

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{t}{l_2} \frac{dn}{d\lambda}$$



monochromator pryzmatyczny



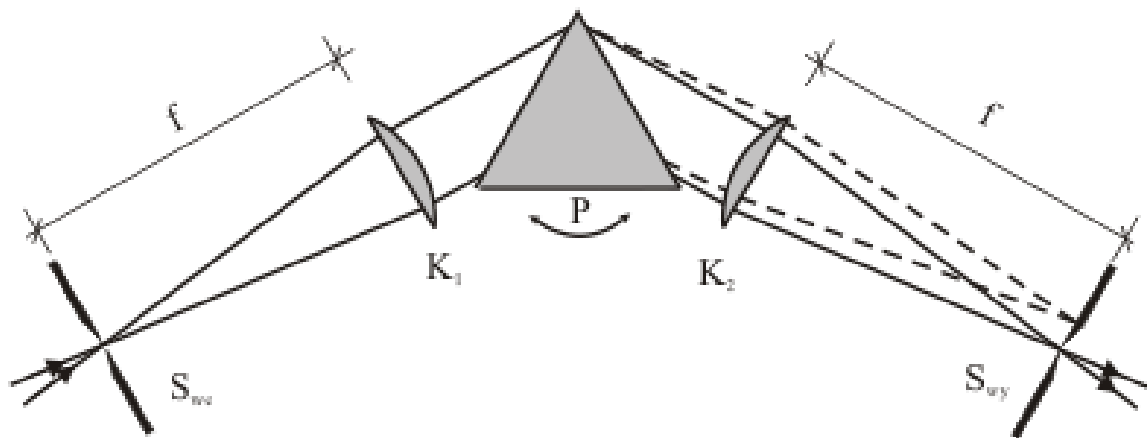
Jak ustalić ϕ_i ?

Szczelina wejściowa + kolimator

Jak rozdzielić różne ε ?

Ogniskowanie – dalekie pole

monochromator
spektrometr
siatkowy



Parametry:

Dyspersja liniowa:

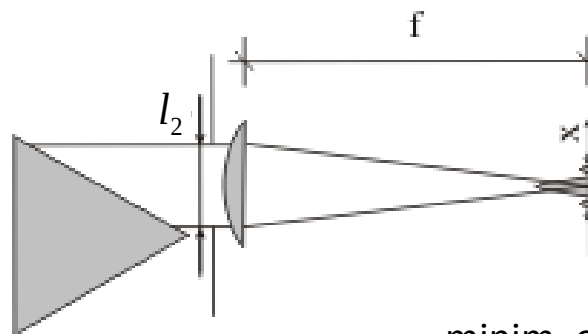
Rozdzielczość

Jasność

Przedział spektralny (FSR)

mm / nm

a/f



$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = t \frac{dn}{d\lambda}$$

minim. odchyl.: $\frac{\lambda}{\delta\lambda} = t \frac{dn}{d\lambda}$

Dudnienia, paczki falowe, 1

2 fale monochromatyczne: ω_1 i ω_2 : $E(t) = E_0 e^{i\omega_1 t} + E_0 e^{i\omega_2 t}$
interferują co skutkuje dudnieniami

$$|E(t)|^2 = 2E_0^2 [1 + \cos(\Delta\omega t)]$$

gdzie

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

Kilka(?) fal o częstościach harmonicznym

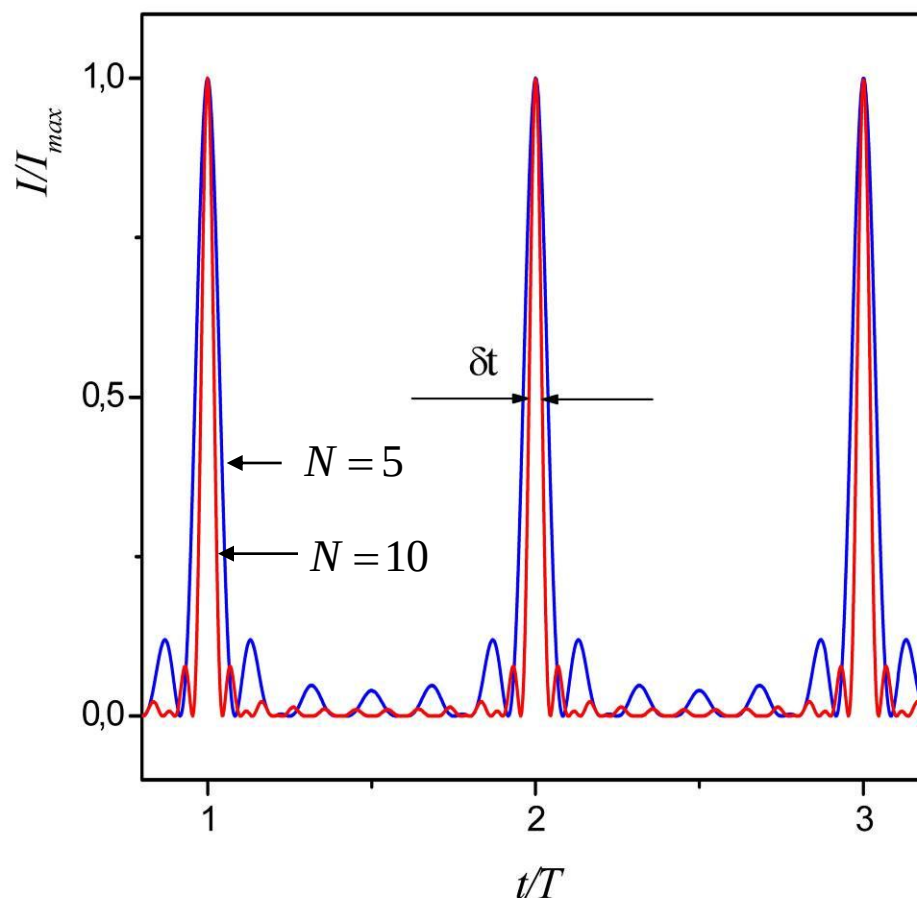
$$E(t) = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\omega_0 t}$$
$$|E(t)|^2 = E_0^2 \left| \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\omega_0 t} \right|^2$$

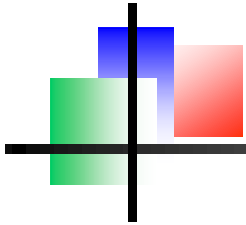
Własności:
okres

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

czas trwania jednego impulsu

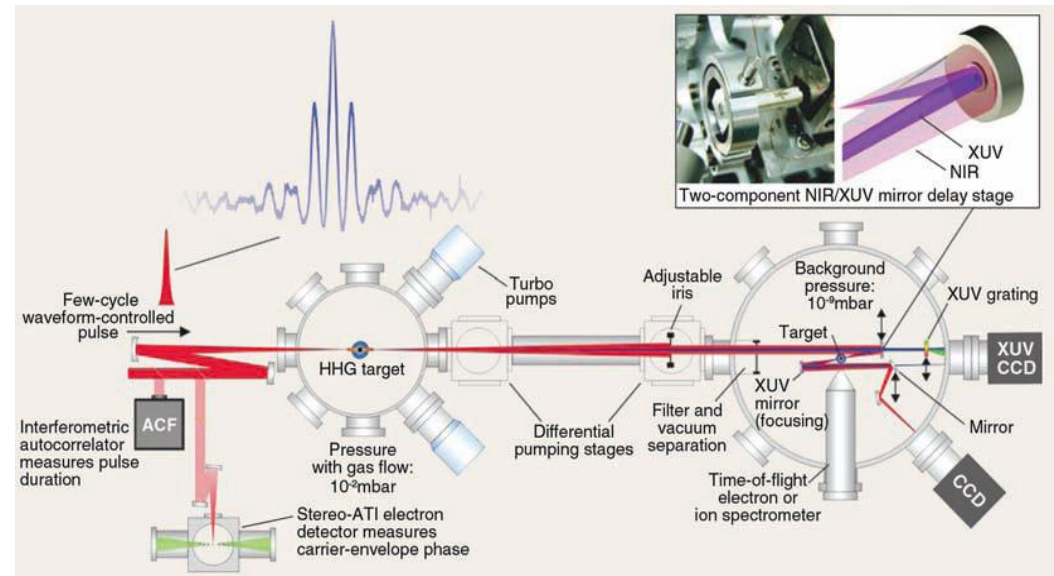
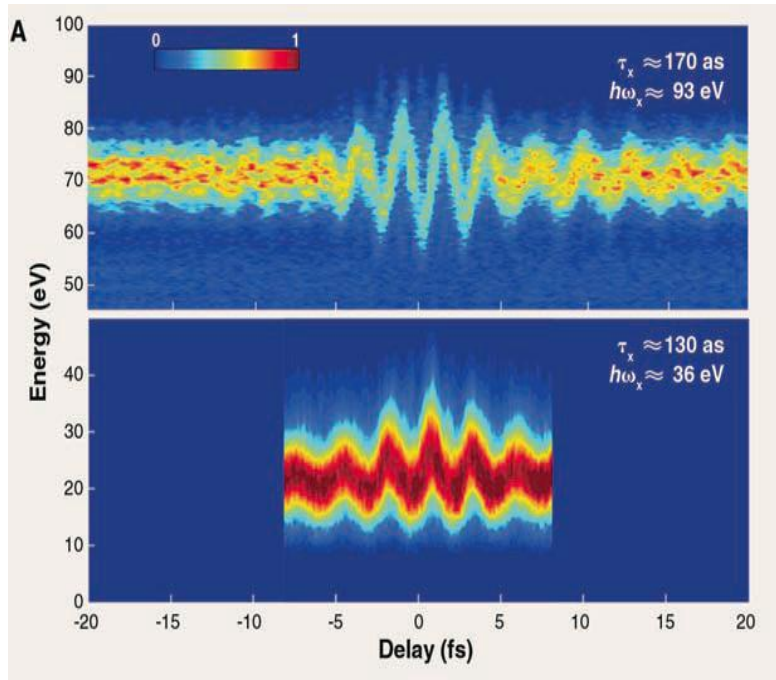
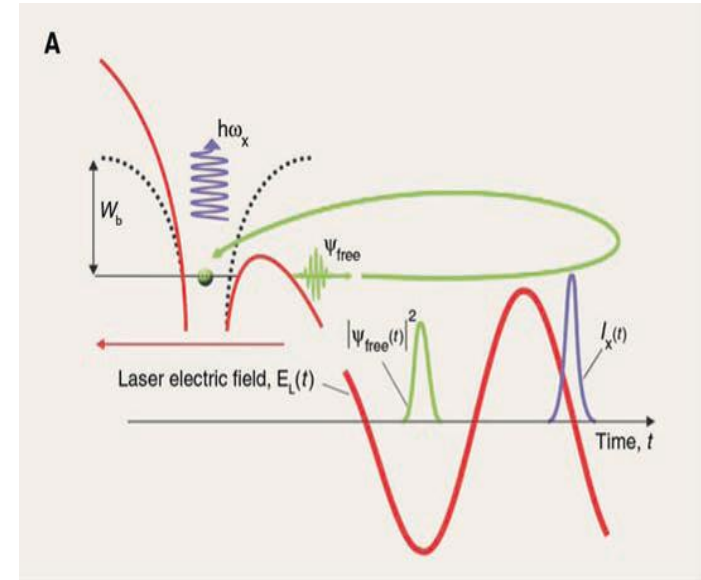
$$\delta t \cong \frac{T}{N}$$





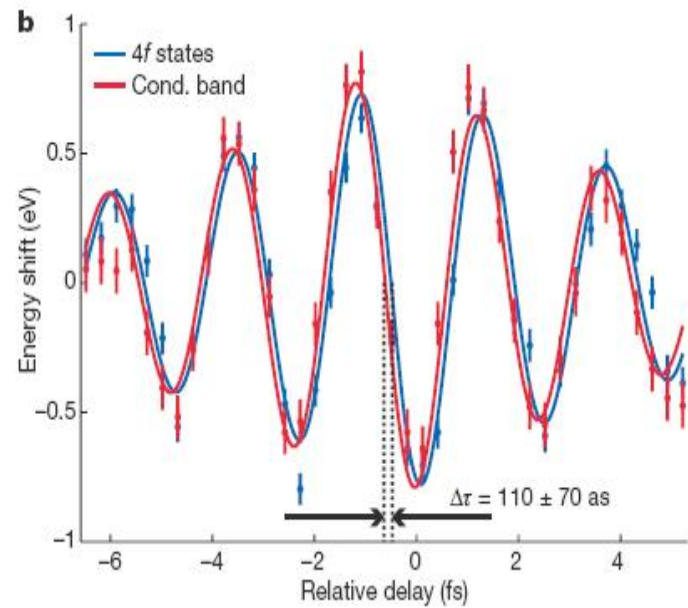
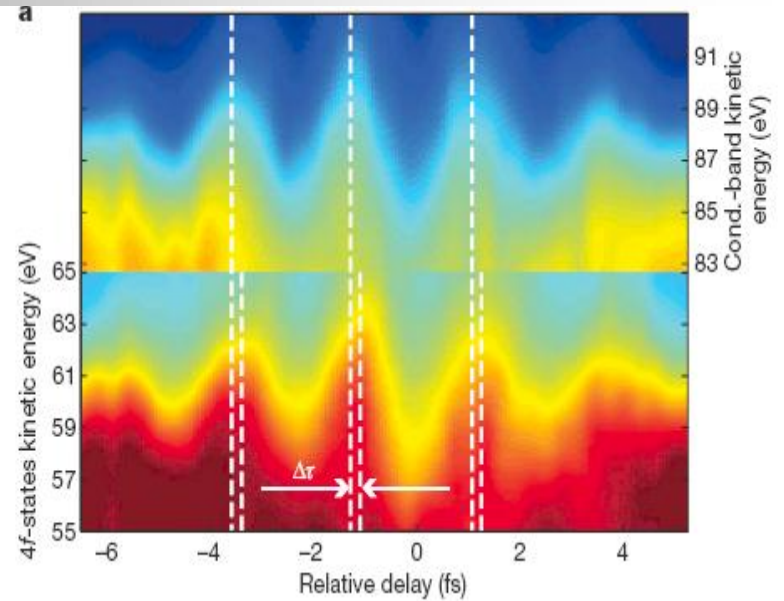
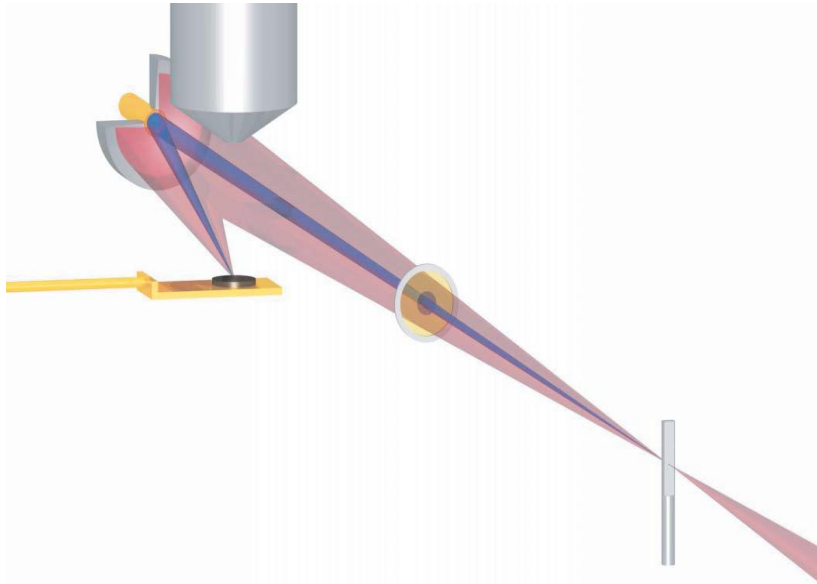
attosekundy

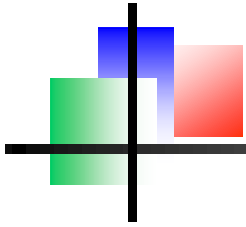
E. Goulielmakis, et al. Science 317, 769-775 (2007)



attosekundy, zastosowania

A. L. Cavalieri et al. Nature 449, 1029-1032 (2007)

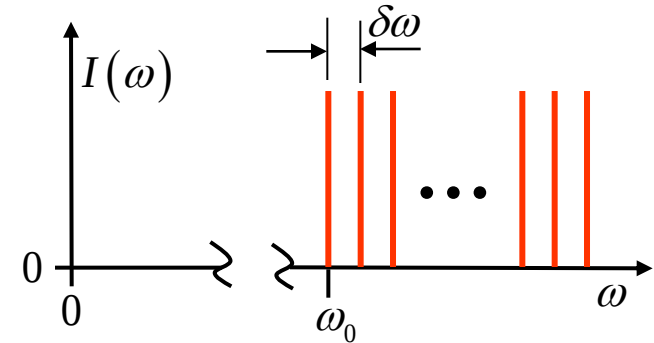




Dudnienia, paczki falowe, 2

wiele fal o równoodległych częstościach

$$\begin{aligned}
 E(t) &= E_0 \sum_{n=1}^N e^{i(\omega_0 + n\delta\omega)t} = \\
 &= E_0 e^{i\omega_0 t} \sum_{n=1}^N e^{in\delta\omega t} = \\
 &= E_0 e^{i\omega_0 t} \frac{1 - e^{iN\delta\omega t}}{1 - e^{i\delta\omega t}}
 \end{aligned}$$



natężenie

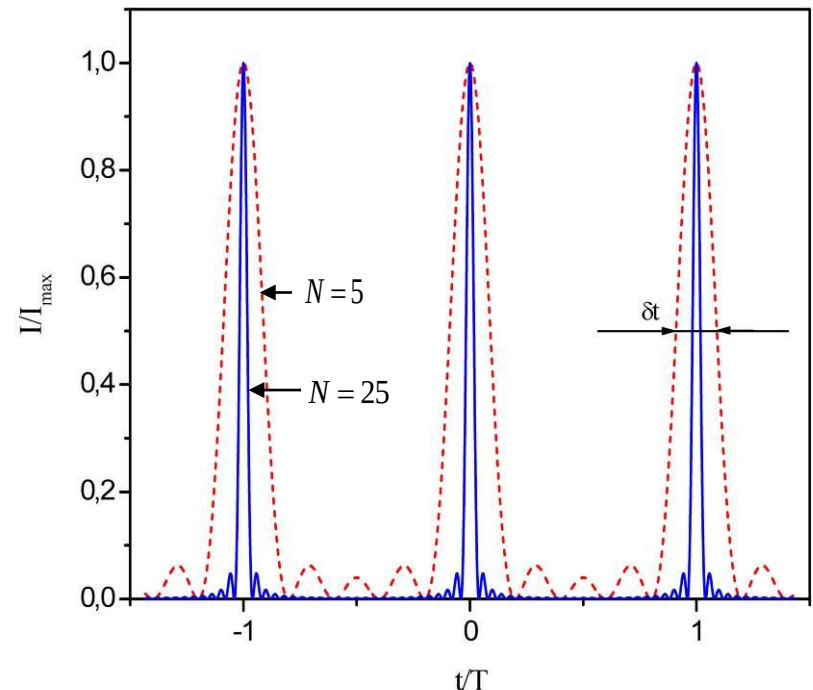
$$|E(t)|^2 = E_0^2 \frac{\sin^2 \frac{N\delta\omega t}{2}}{\sin^2 \frac{\delta\omega t}{2}}$$

Ciąg impulsów z okresem

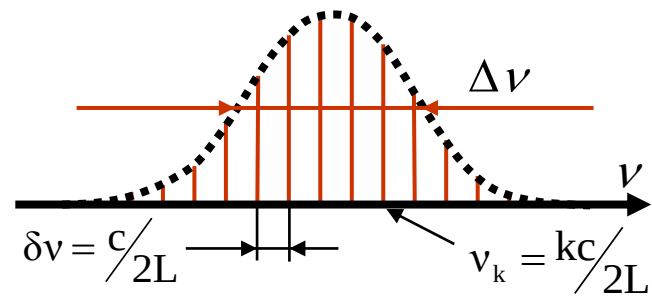
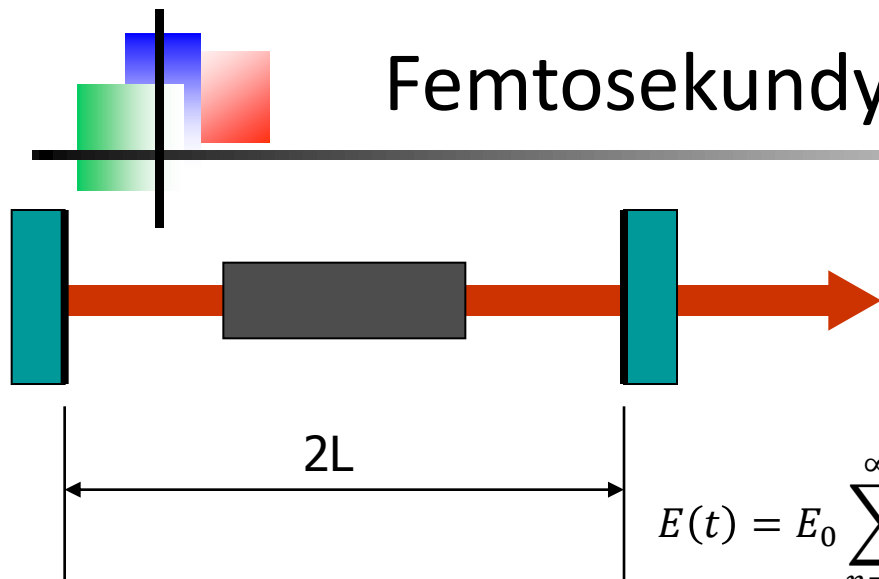
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

O czasie trwania

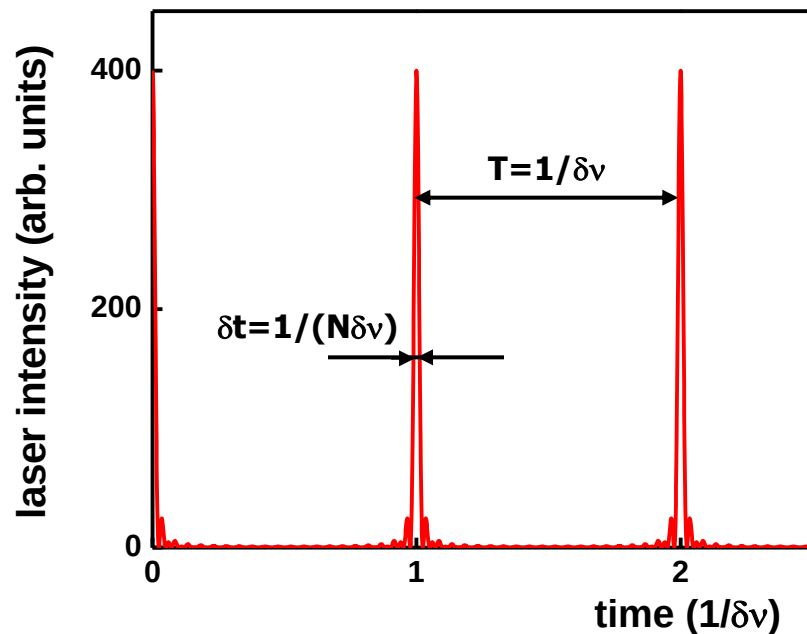
$$\delta t \cong \frac{2\pi}{N\delta\omega}$$



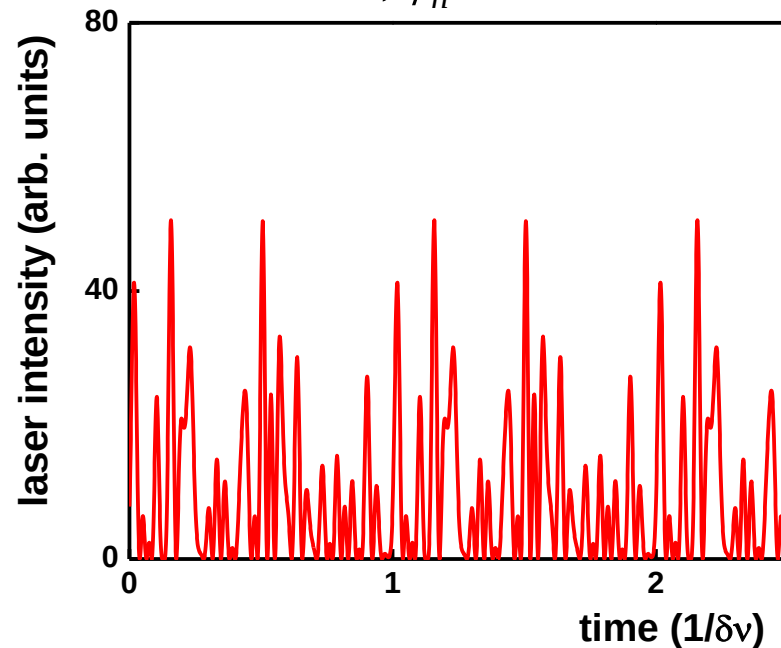
Femtosekundy – synchronizacja modów



$N = 20, \phi_n = 0$



$N = 20, \phi_n = \text{random}$



Femtosekundy – wyniki

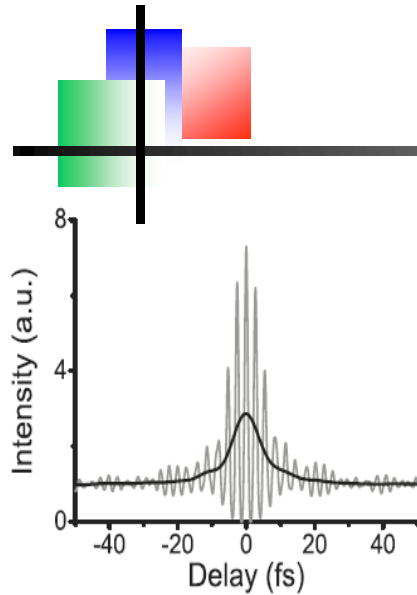


FIGURE 2 Measured Autocorrelation: interferometric autocorrelation (IAC, *gray line*) and intensity autocorrelation with background (AC, *black line*). The AC is retrieved by Fourier filtering the DC-part of the IAC. The FWHM of the AC is 10.0 fs

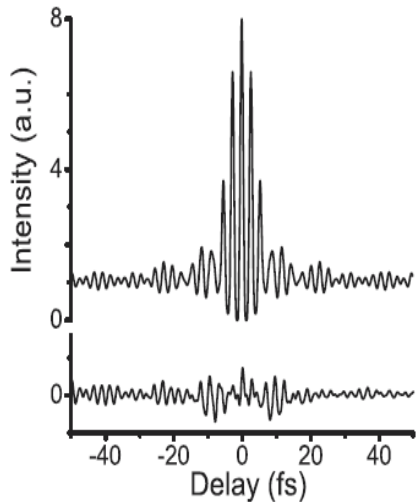


FIGURE 4 Calculated interferometric autocorrelation from the SPIDER measurement (*top*) and the difference in the measured IAC of Fig. 2 (*bottom*)

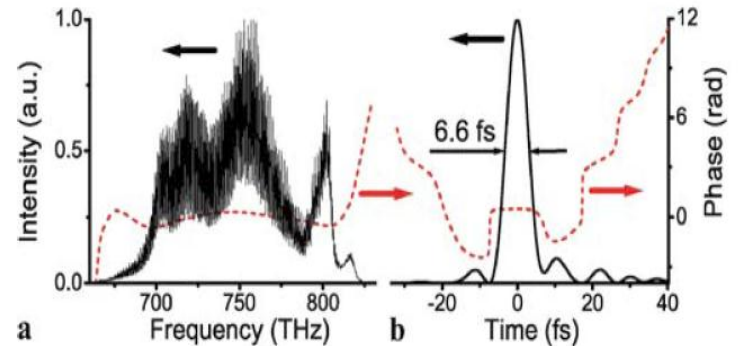


FIGURE 3 The SPIDER measurement: (a) SPIDER interferogram (*solid line*) and reconstructed spectral pulse phase (*dashed line*); (b) reconstructed temporal pulse profile (*solid line*) and temporal phase (*dashed line*). The FWHM pulse duration is 6.6 fs

G. Stibenz et al. Appl. Phys. B83, 511-519 (2006)

Impuls gaussowski

pole w postaci

$$E(t) = Ae^{-\frac{t^2}{2\tau^2}}e^{i\omega t}$$

daje natężenie

$$I(t) = A^2 e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}$$

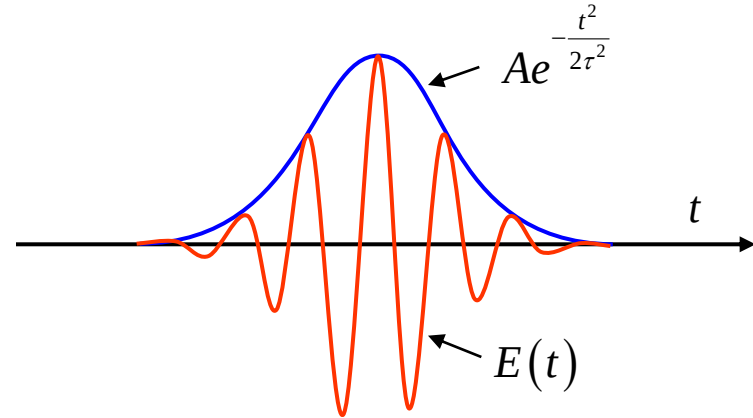
szerokość połówkową Δt profilu
natężenia liczymy z równości

$$e^{-\frac{\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2}{\tau^2}} = \frac{1}{2}$$

skąd

$$\Delta t = 2\sqrt{\ln 2}\tau$$

$$\begin{aligned}\Delta\omega\Delta t &= 4\ln 2 \\ \Delta\nu\Delta t &= \frac{2\ln 2}{\pi} \cong 0.441\end{aligned}$$



Transformata Fouriera daje $E(\omega) = \sqrt{2\pi}\tau Ae^{-\frac{\tau^2(\omega-\omega_0)^2}{2}}$
skąd widmo to

$$I(\omega) = 2\pi\tau^2 A^2 e^{-\tau^2(\omega-\omega_0)^2}$$

a jego szerokość połówkowa to

$$\Delta\omega = \frac{2}{\tau}\sqrt{\ln 2}$$

Dla dowolnego impulsu mamy

$$\Delta\nu\Delta t > \kappa$$

gdzie κ jest rzędu jedności i zależy od kształtu impulsu

ograniczenie furierowskie $\Leftrightarrow$ zasada nieoznaczoności Heisenberga

Impuls gaussowski ze świergotem

weźmy pole w postaci

$$E(t) = Ae^{-\Gamma t^2} e^{i\omega_0 t}, \Gamma = a + ib$$

Impuls ma częstość zależną od czasu
(świergot)

$$\omega(t) = \omega_0 + 2bt$$

prosty rachunek daje szerokość połówkową
(FWHM) profilu czasowego natężenia

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\ln 2}{a}}$$

Transformata Fouriera daje widmo

$$I(\omega) \propto e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)(\omega-\omega_0)^2}$$

o szerokości połówkowej

$$\Delta\omega = \sqrt{8\ln 2} \sqrt{a\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)}$$

$$\Delta\omega\Delta t = 4\ln 2$$

$$\Delta\omega\Delta t = 4\ln 2 \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

- impuls fourierowsko ograniczony

- impuls ze świergotem

