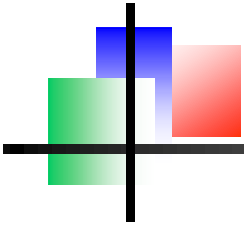


# Podstawy Fizyki IV

## Optyka z elementami fizyki współczesnej

wykład 14, 30.03.2012

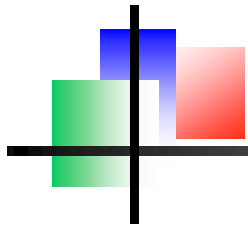
|            |                                     |
|------------|-------------------------------------|
| wykład:    | Czesław Radzewicz                   |
| pokazy:    | Radosław Chrapkiewicz, Filip Ozimek |
| ćwiczenia: | Ernest Grodner                      |



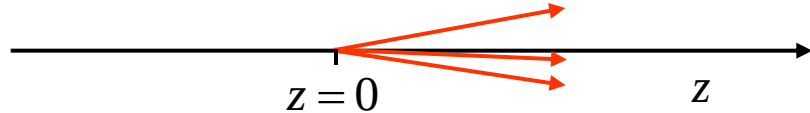
# Wykład 13 - przypomnienie

---

- płasko-równoległy interferometr Fabry-Perot
  - amplituda i faza fali przechodzącej
  - transmisja natężenia – rezonanse
  - finesse
  - interferometr F-P jako filtr spektralny, zdolność rozdzielcza, FSR
- siatka dyfrakcyjna
  - wzór siatkowy, rzędy ugięcia
  - dyspersja kątowna, zdolność rozdzielcza, FSR
- dyspersja kątowna pryzmatu
- spektrometry: pryzmatyczny, siatkowy
- dudnienia, ultrakrótkie impulsy jako wynik składania częstości harmoniczných



# Superpozycja wielu fal płaskich monochrom.



$$E(k_x, k_y) = A(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

wektor falowy pojedynczej fali charakteryzujemy podając  $k_x$  oraz  $k_y$ ;

trzecią składową liczymy ze związku dyspersyjnego

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2}$$

Przyjmijmy 2D gaussowski rozkład w płaszczyźnie  $k_x - k_y$

$$A(k_x, k_y) = A_0 e^{-\frac{k_x^2 + k_y^2}{\sigma^2}}$$

i policzmy pole w  $z = 0$

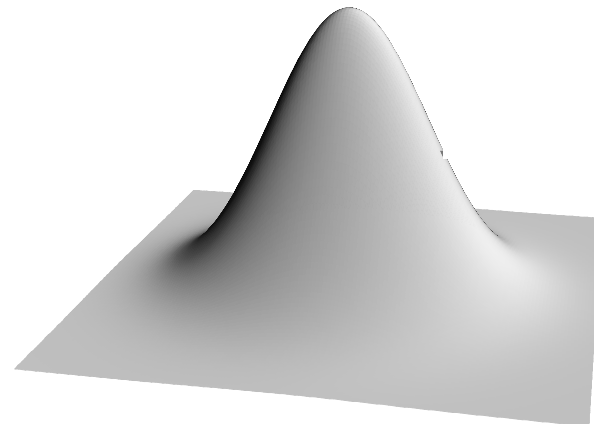
$$E(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y E(k_x, k_y) = \frac{A_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{-\frac{k_x^2 + k_y^2}{\sigma^2} + i(k_x x + k_y y)}$$

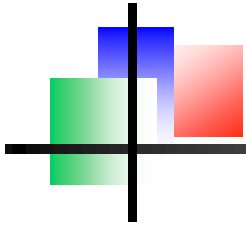
Korzystamy z lematu Siegmana

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-Ay^2 - 2By} = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{B^2/A} \quad \text{dla } \operatorname{Re} A > 0$$

i liczymy pole

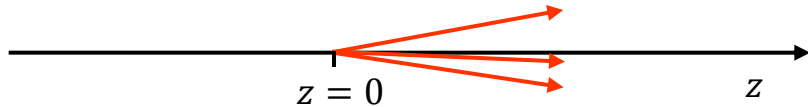
$$E(x, y, 0) = \frac{A_0}{2} \sigma^2 e^{-\frac{\sigma^2(x^2 + y^2)}{4}} = \frac{A_0}{2} \sigma^2 e^{-\frac{\sigma^2 r^2}{4}}$$





# superpoz. wielu fal – wiązka gaussowska.

$$E(k_x, k_y) = A(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$



przybliżenie przyosiowe:  $k_x^2 + k_y^2 \ll k^2$  daje

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \cong k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}$$

co skutkuje polem

$$E(k_x, k_y, z) = A(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} z)}$$

Dla gaussowskiego rozkładu składowych pola w  $z \neq 0$  mamy

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y E(k_x, k_y, z) = \\ &= \frac{A_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{-\frac{k_x^2 + k_y^2}{\sigma^2} + i(k_x x + k_y y + k_z z - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} z)} = \\ &= \frac{A_0}{2\pi} e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{-\left(\frac{1}{\sigma^2} + i\frac{z}{2k}\right)(k_x^2 + k_y^2) + i(k_x x + k_y y)} = \\ &= \frac{A_0}{2\pi} e^{ikz} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{-\frac{k_x^2 + k_y^2}{\sigma'^2} + i(k_x x + k_y y)} = \frac{A_0}{2} \sigma'^2 e^{-\frac{\sigma'^2 r^2}{4}} \end{aligned}$$

$$E(x, y, z) = \frac{A_0}{2} \sigma'^2 e^{-\frac{\sigma'^2 r^2}{4}} = \frac{A_0}{2} \sigma'^2 e^{-\frac{\text{Re}(\sigma'^2) r^2}{4} - i \frac{\text{Im}(\sigma'^2) r^2}{4}}$$

gauss

paraboloida=sfera

gdzie zespolony parametr  $\sigma'$  jest zdefiniowany równością

$$\frac{1}{\sigma'^2} = \frac{1}{\sigma^2} + i \frac{z}{2k}$$

# fala paraboliczna

r-nie falowe w ośrodku jednorodnym, izotropowym dielektryku

$$\left(\Delta - \frac{n^2}{c^2}\right) \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$$

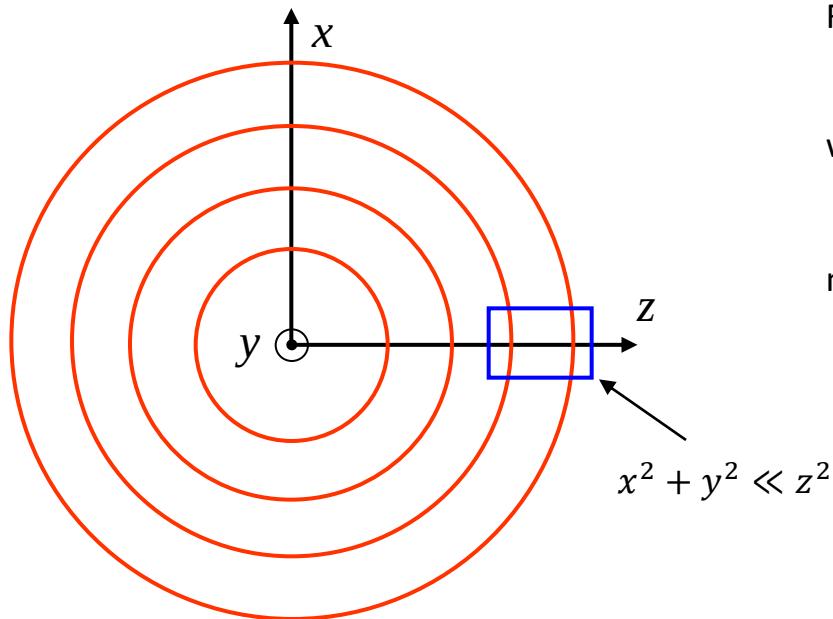
daje, przy założeniu fali monochromatycznej  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r})e^{i\omega t}$ ,  
**równanie Helmholtza**

$$(\Delta + k^2)\vec{A}(\vec{r}) = 0$$

ze związkiem dyspersyjnym  $k^2 = \frac{n^2\omega^2}{c^2}$

Jeśli rozważamy pole skalarne  $A(\vec{r})$  to

$$(\Delta + k^2)A(\vec{r}) = 0$$



Fala sferyczna

$$A(\vec{r}) = \frac{A_0}{r} e^{-ikr}, \quad r = |\vec{r}|$$

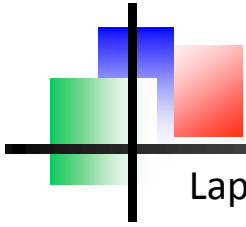
w przybliżeniu przyosiowym

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cong z - \frac{x^2 + y^2}{2z}$$

ma postać

$$A(\vec{r}) \cong \frac{A_0}{z} e^{-ikz} e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2z}}$$

Ponieważ równanie  $\frac{x^2+y^2}{2z} = \text{const}$  opisuje paraboloidę obrotową to falę taką nazywamy **falą paraboliczną**



# przyosiowe r-nie Helmholtza, 1

Laplasjan w r-niu Helmholtza  $(\Delta + k^2)A(\vec{r}) = 0$

wygodnie jest podzielić na część poprzeczną ( $\perp z$ ) oraz osiową ( $\parallel z$ ):

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta_T + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta_T = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Wprowadzamy wolnozmienną obwiednię fali  $\psi(x, y, z)$  taką, że  $A(\vec{r}) = \psi(x, y, z)e^{-ikz}$  i różniczkujemy po  $z$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} e^{-ikz} - ik\psi e^{-ikz} \right) = \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} - k^2 \psi \right) e^{-ikz}$$

W przybliżeniu przyosiowym

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \ll 2k \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|$$

co daje r-nie Helmholtza

$$\Delta_T \psi - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

wolnozmienna obwiednia

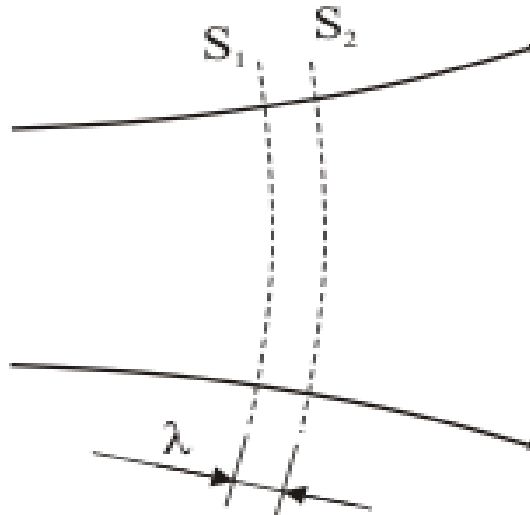
dowód:

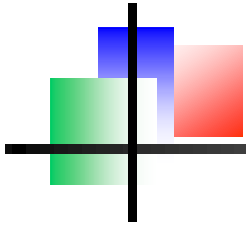
$$\int_{S_1} |\psi|^2 dS = \int_{S_2} |\psi|^2 dS$$

$$\psi(z + \lambda) \cong \psi(z) + \frac{\partial \psi}{\partial z} \lambda$$

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \lambda \right| \ll |\psi| \Leftrightarrow \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right| \ll \frac{k}{2\pi} |\psi|$$

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \ll \frac{k}{2\pi} \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|$$





# przyosiowe r-nie Helmholtza, 2

$$\Delta_T \psi - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

Wstawmy falę paraboliczną  $\psi(x, y, z) \cong \frac{A_0}{z} e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2z}}$

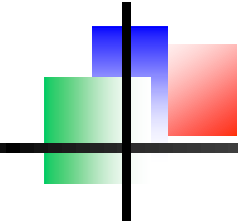
Rachunki ...: fala paraboliczna spełnia r-nie Helmholtza w wersji przyosiowej

spróbujmy czegoś bardziej ogólnego :  $\psi(x, y, z) \cong \frac{A_0}{q(z)} e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2q(z)}}$ ,  $q(z) = z + a$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \left[ -i \frac{2k}{q^2} - \frac{k^2(x^2+y^2)}{q^3} \right] A_0 e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2q}} \\ 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \left[ -i \frac{2k}{q^2} - \frac{k^2(x^2+y^2)}{q^3} \right] A_0 e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2q}} \end{aligned} \right\} \text{ też spełnia przyosiowe r-nie Helmholtza}$$

$$\left\{ \begin{aligned} E(x, y, z) &= \frac{A_0}{2} \sigma'^2 e^{-ikz} e^{-\frac{\sigma'^2 r^2}{4}} \\ \frac{1}{\sigma'^2} &= \frac{1}{\sigma^2} + i \frac{z}{2k} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} E(x, y, z) &= \frac{A_0}{q(z)} e^{-ikz} e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2q(z)}} \\ q(z) &= iz_0 + z \end{aligned} \right.$$

wiązka gaussowska



# wiązka gaussowska- inne podejście

Startujemy z przyosiowego r-nia Helmholtza:  $\Delta_T \psi - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$

1. postulujemy symetrię cylindryczną

$$\Delta_T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

2. Postulujemy

$$\psi = e^{-i \left[ P(z) + \frac{kr^2}{2q(z)} \right]}$$

3. Pracowicie różniczkujemy ... i wstawiamy do r-nia Helmholtza

$$\left\{ \left[ \frac{k^2}{q^2(z)} \left( \frac{dq}{dz} - 1 \right) \right] r^2 - 2k \left[ \frac{dP}{dz} + \frac{i}{q(z)} \right] \right\} \psi = 0$$

$$\frac{dq}{dz} - 1 = 0 \Rightarrow q(z) = q_0 + z$$

$$\text{w } z = 0 \text{ mamy } |\psi|^2 = |e^{-iP(0)}|^2 \left| e^{\frac{-ikr^2}{2q_0}} \right|^2$$

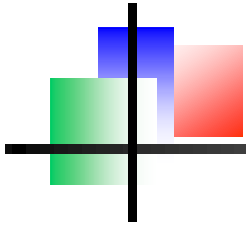
stąd

$$q_0 = iz_0$$

$$\frac{dP}{dz} + \frac{i}{q(z)} = 0 \dots \Rightarrow e^{-iP(z)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (z/z_0)^2}} e^{i \arctan(z/z_0)}$$

$$A(x, y, z) = A_0 \psi(x, y, z) e^{-ikz} = \frac{A_0}{\sqrt{1 + (z/z_0)^2}} \cdot e^{i[-kz + \arctan(z/z_0)]} \cdot e^{\frac{-ikr^2}{2(iz_0 + z)}}$$





# wiązka gaussowska

trochę porządków w rachunkach:

$$A(x, y, z) = A_0 \psi(x, y, z) e^{-ikz} = \frac{A_0}{\sqrt{1 + (z/z_0)^2}} \cdot e^{i[-kz + \arctan(z/z_0)]} \cdot e^{\frac{-ikr^2}{2(iz_0 + z)}}$$

przyjrzyjmy się wyrażeniu

$$\frac{i}{iz_0 + z} = \frac{z}{z^2 + z_0^2} - i \frac{z_0}{z^2 + z_0^2}$$

zatem

$$\frac{-ikr^2}{2(iz_0 + z)} = -\frac{kz_0 r^2}{z^2 + z_0^2} - i \frac{kz r^2}{z^2 + z_0^2} = -\frac{r^2}{w^2(z)} - i \frac{kr^2}{2R(z)}$$

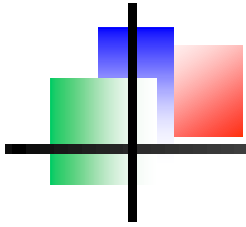
dwa nowe parametry to  $w(z)$  oraz  $R(z)$  są zdefiniowane r-niami

$$w^2(z) = \frac{2(z^2 + z_0^2)}{kz_0} = \frac{\lambda z_0}{\pi n} [1 + (z/z_0)^2]$$

$$R(z) = \frac{z^2 + z_0^2}{z} = z[1 + (z/z_0)^2]$$

$w(z)$  i  $R(z)$  definiują parametr  $q$  wiązki gaussowskiej:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)}$$



# wiązka gaussowska – własności, 1

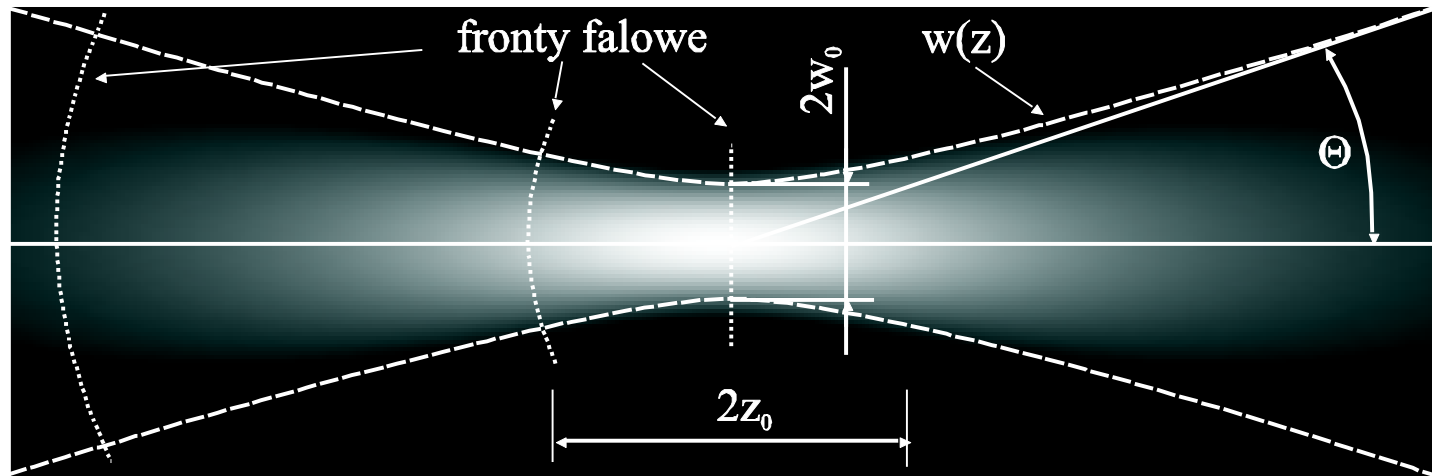
$$\text{Natężenie } I = |A(x, y, z)|^2 = A_0^2 \left( \frac{w_0}{w(z)} \right)^2 e^{-\frac{2r^2}{w^2(z)}}$$

gdzie  $w_0 = w(0) = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi n}}$  to tzw. **talia (przewężenie)** wiązki

$w(z)$  - promień wiązki na poziomie  $1/e^2$

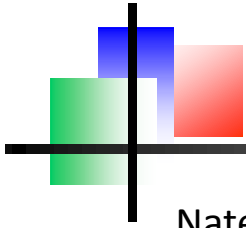
$$w^2(z) = \frac{\lambda z_0}{\pi n} [1 + (z/z_0)^2] = w_0^2 [1 + (z/z_0)^2]$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} w(z) = w_0 z / z_0, \text{ kąt rozbieżności } \Theta = \frac{w_0}{z_0} = \frac{\lambda}{\pi n w_0}$$



**zasięg Rayleigha:**  $2z_0$

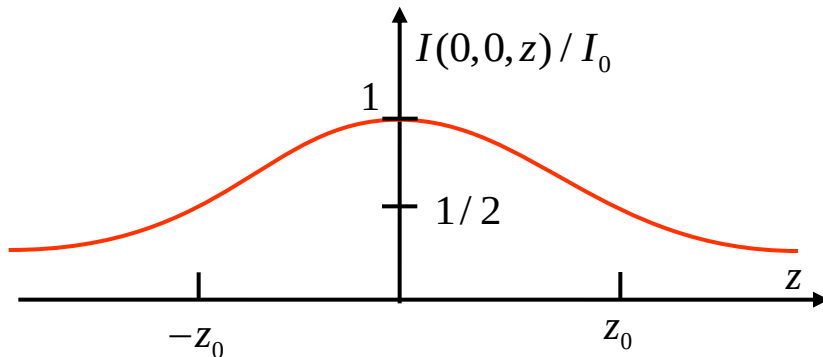
$$w(z_0) = \sqrt{2} w_0$$



# wiązka gaussowska – własności, 2

Natężenie  $I = |A(x, y, z)|^2 = A_0^2 \left( \frac{w_0}{w(z)} \right)^2 e^{-\frac{2r^2}{w^2(z)}}$

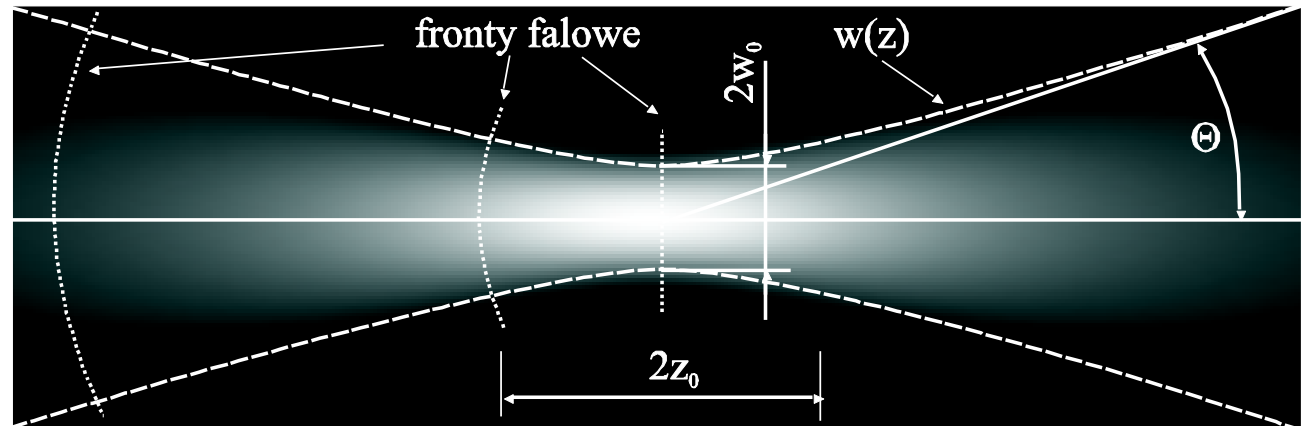
natężenie na osi:  $I(0,0,z) = \frac{I_0}{1+(z/z_0)^2}$

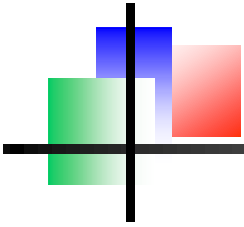


moc wiązki:  $P = \int_0^\infty I(r,z) 2\pi r dr = \frac{1}{2} I_0 \pi w_0^2$

% mocy na kole o promieniu  $r_0$

$$\frac{1}{P} \int_0^{r_0} I(r,z) 2\pi r dr = 1 - e^{-\frac{2r_0^2}{w_0^2}}$$



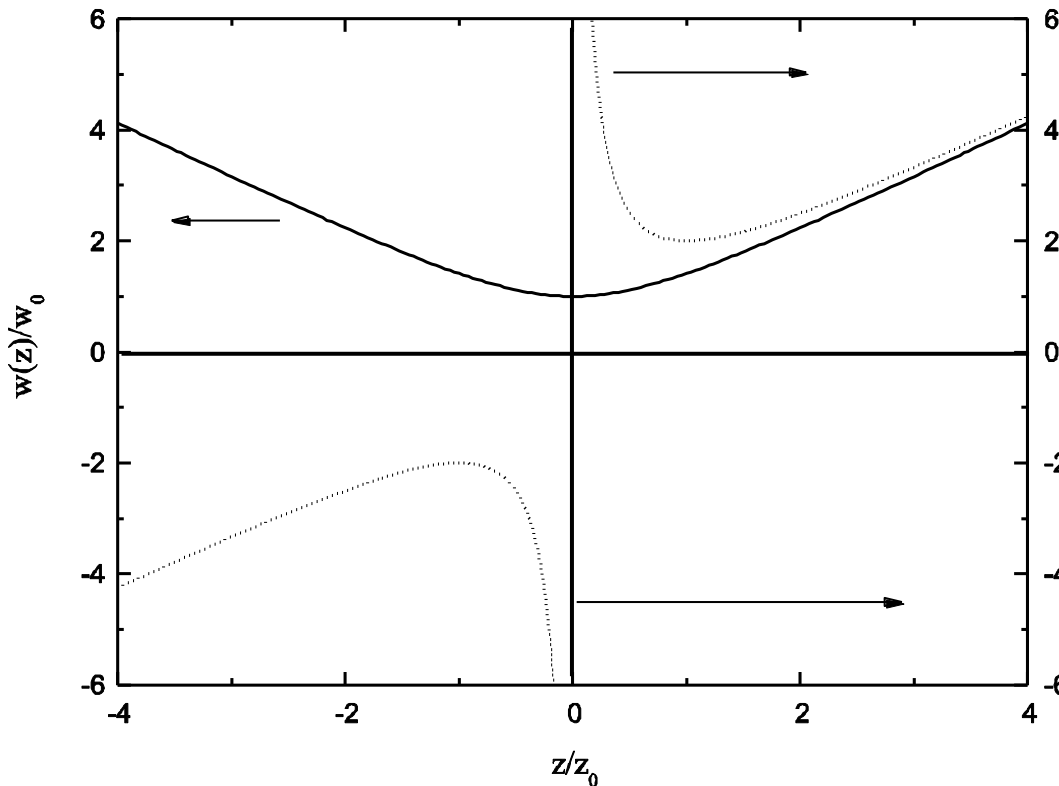


# wiązka gaussowska – własności, 3

fronty falowe:  $A(x, y, z) \propto e^{-ik\left(z - \frac{r^2}{2R(z)}\right)}$

fronty falowe są **paraboliczne=sferyczne** a promień sfery to

$$R(z) = \frac{z^2 + z_0^2}{z} = z\left[1 + (z/z_0)^2\right]$$

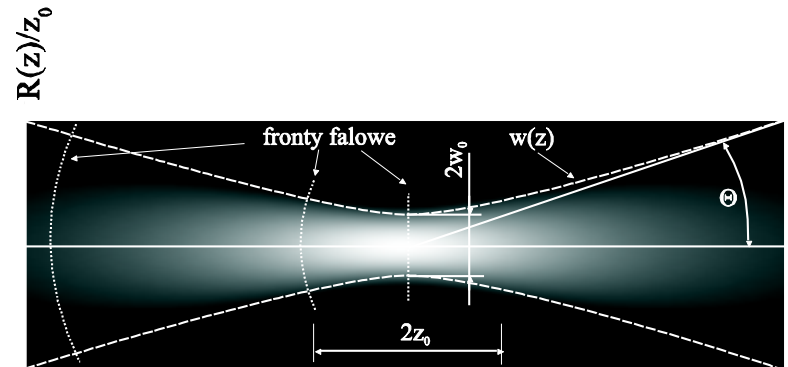


minimalna wartość krzywizny frontu falowego to

$$R(z_0) = 2z_0$$

a asymptota

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = z$$



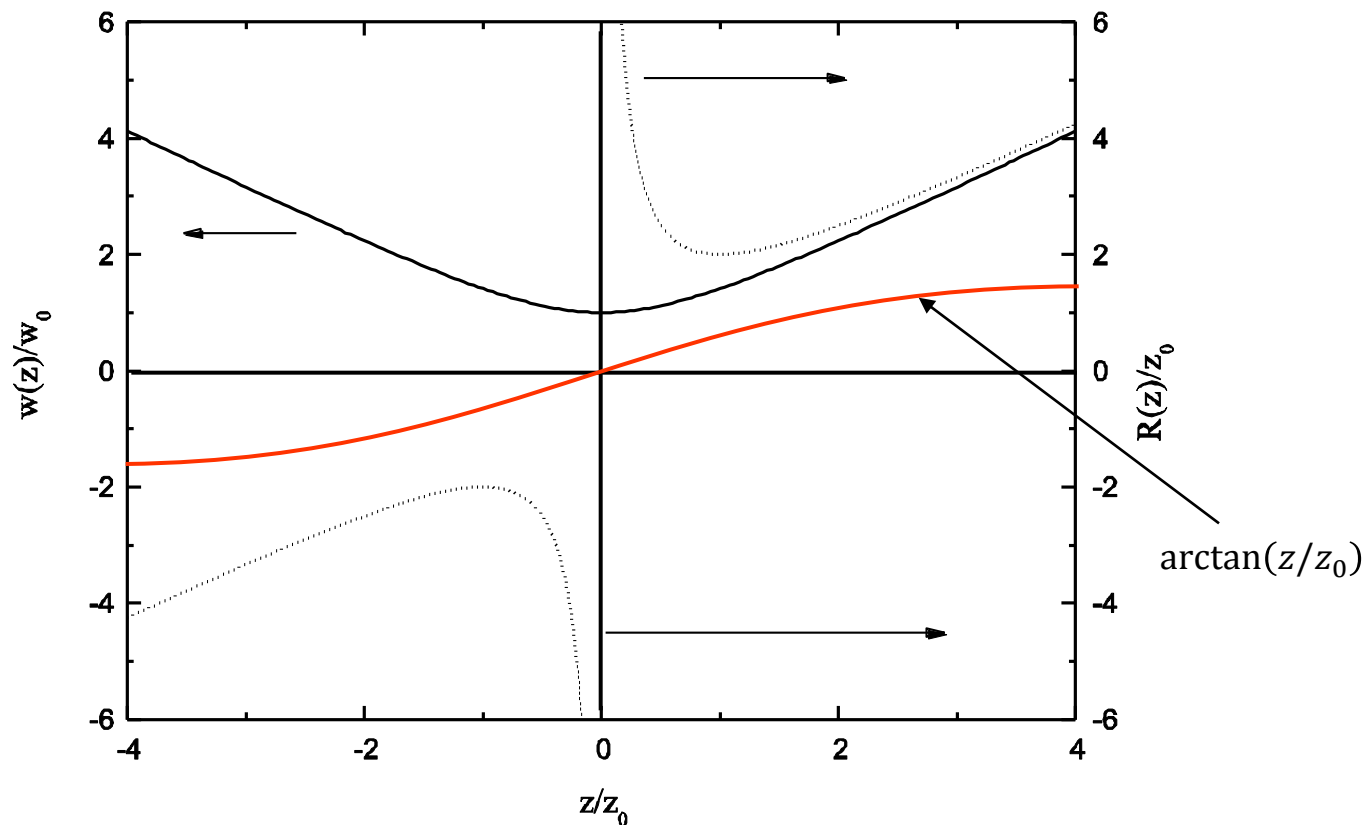
**konwencja znaków!**

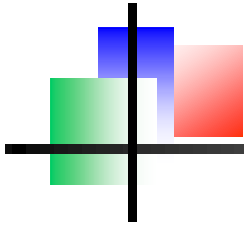
# wiązka gaussowska- własności 4

$$\text{faza na osi } A(x, y, z) \propto e^{-i[kz + \arctan(z/z_0)]}$$

faza fali płaskiej

faza Guoya





# wiązki Gaussa-Hermita, 1

$$\text{Wiązka Gaussa: } A_G(x, y, z) = \frac{A_0}{q(z)} e^{-ikz} e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2q(z)}}$$

rozwiązanie próbne dla szerszej klasy wiązek:  $A(x, y, z) = X(u)Y(v)e^{iL(z)}A_G(x, y, z)$ ,  $u = \frac{\sqrt{2}x}{w(z)}$ ,  $v = \frac{\sqrt{2}y}{w(z)}$

spełnia warunki

$$\text{amplituda wiązki: } X\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right)Y\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right)\frac{w_0}{w(z)}e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}}$$

kształt frontów falowych jak w wiązce gaussowskiej

rozwiązanie próbne wstawiamy  
do przyosiowego r-nia Helmholtza

$$\underbrace{\frac{1}{X}\left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} - 2u\frac{\partial X}{\partial u}\right)}_{-\mu_1} + \underbrace{\frac{1}{Y}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} - 2v\frac{\partial Y}{\partial v}\right)}_{-\mu_2} + \underbrace{k w^2(z)\frac{\partial L}{\partial x}}_{\mu_1 + \mu_2} = 0$$

# wiązki Gaussa-Hermita, 2

3 r-nia:  $-\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} + 2u \frac{\partial X}{\partial u} = \mu_1 X$

$$-\frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} + 2v \frac{\partial Y}{\partial v} = \mu_2 Y$$

$$w(z) \frac{\partial L}{\partial x} = \mu_1 + \mu_2$$

$X, Y$  - wielomiany Hermita  $H_l, H_m$

Rekurencyjna definicja wielomianu Hermita

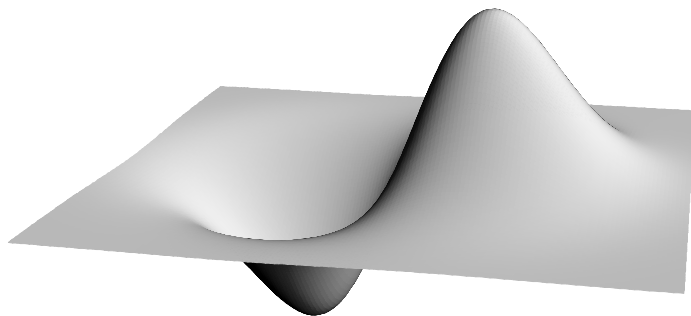
$$H_{l+1}(u) = 2uH_l(u) - 2lH_{l-1}(u)$$

$$H_0(u) = 1, H_1(u) = 2u$$

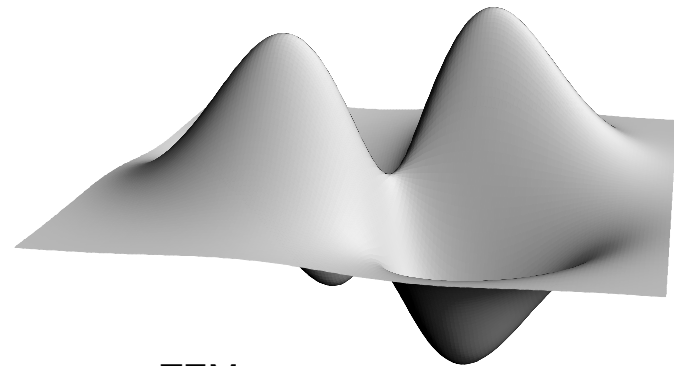
$$L(z) = (l + m) \arctan(z/z_0)$$

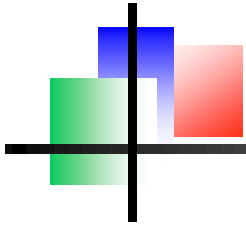
mody  $\text{TEM}_{lm}$

$\text{TEM}_{10}$



$\text{TEM}_{11}$





# parametr $M^2$ wiązki

W przewężeniu wiązki wyznaczamy jej rozmiary

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\int x^2 I(x,y,0) dx dy}{\int I(x,y,0) dx dy}}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\int y^2 I(x,y,0) dx dy}{\int I(x,y,0) dx dy}}$$

**Fakt:** w dalekim polu rozkład natężenia zachowuje kształt a rozmiary wiązki rosną liniowo z odległością od przewężenia  $I(x, y, Mz) = \frac{1}{M^2} I(x, y, z)$   
dzięki czemu kąty rozbieżności wiązki w dalekim polu są dobrze zdefiniowane i możemy policzyć ich wariancje

$$\Theta_x = \lim_{z \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\int \Theta_x^2 I(\Theta_x, \Theta_y, z) d\Theta_x d\Theta_y}{\int I(\Theta_x, \Theta_y, z) d\Theta_x d\Theta_y}}, \quad \Theta_y = \lim_{z \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\int \Theta_y^2 I(\Theta_x, \Theta_y, z) d\Theta_x d\Theta_y}{\int I(\Theta_x, \Theta_y, z) d\Theta_x d\Theta_y}}$$

dla wiązki gaussowskiej

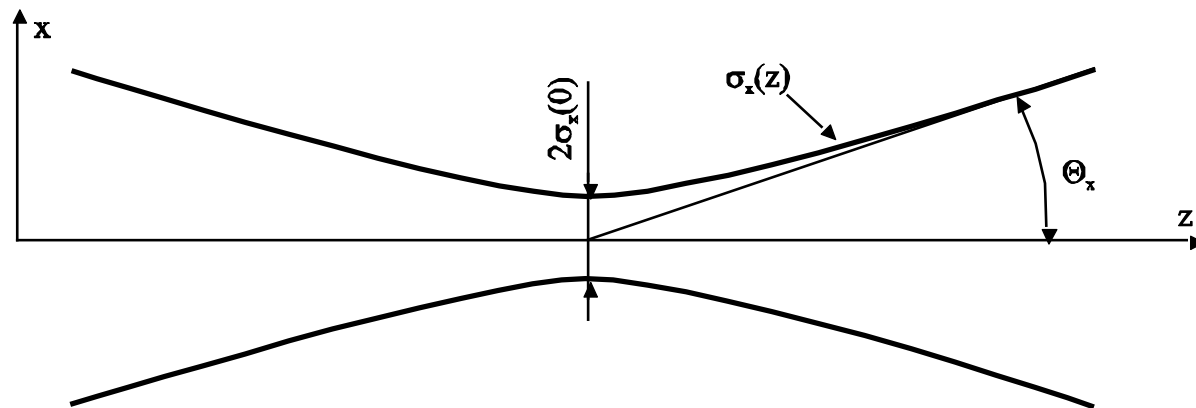
$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_G = w_0$$

$$\Theta_x = \Theta_y = \Theta_G = w_0 / z_0$$

a iloczyn

$$\sigma_G \Theta_G = \lambda / \pi$$

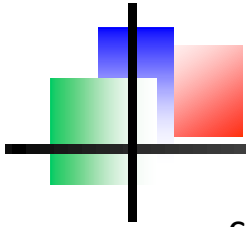
jest najmniejszy



dla każdej innej wiązki o danych  $\sigma$  i  $\Theta$

$$M^2 = \frac{\sigma \Theta}{\sigma_G \Theta_G} > 1$$





# wiązka gaussowska i soczewka

cienka soczewka skupiająca

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{f}$$

czyli

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f}$$

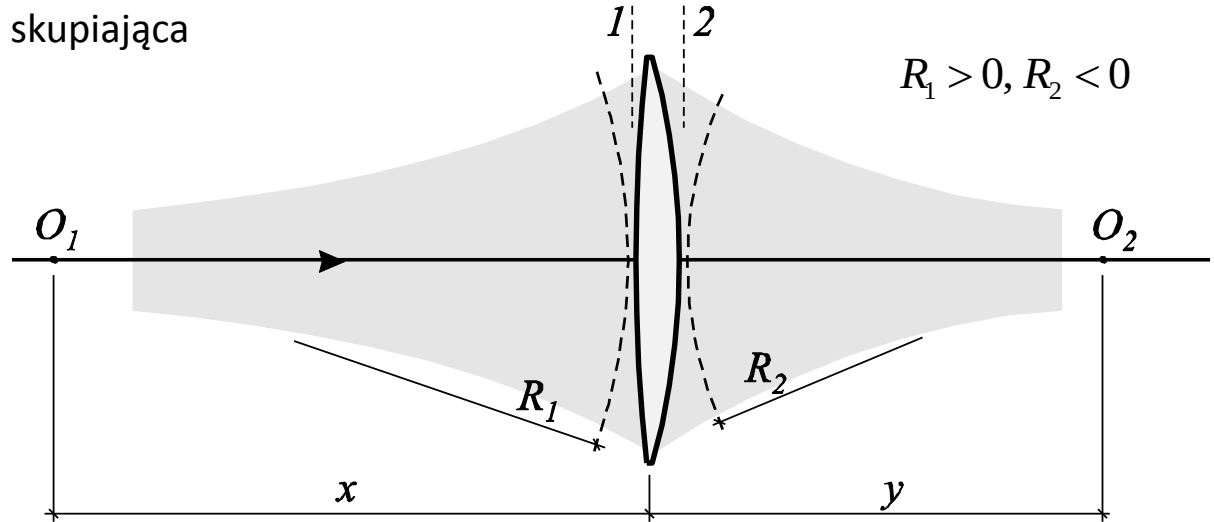
Jednocześnie

$$w_2 = w_1$$

Możemy policzyć parametr  $q$  wiązki za soczewką

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{R_2} -$$

$$i \frac{\lambda}{\pi w_2} = \frac{1}{R_2} - i \frac{\lambda}{\pi w_2} - \frac{1}{f} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f}$$



**Przykład:**

przewężenie wiązki o danym  $z_0$  w przedniej płaszczyźnie ogniskowej

$q_1 = iz_{01} + f$  bo obowiązuje formuła  $q(z + d) = q(z) + d$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f} = \frac{1}{iz_{01} + f} - \frac{1}{f} \Rightarrow q_2 = -f + i \frac{f^2}{z_{01}}$$

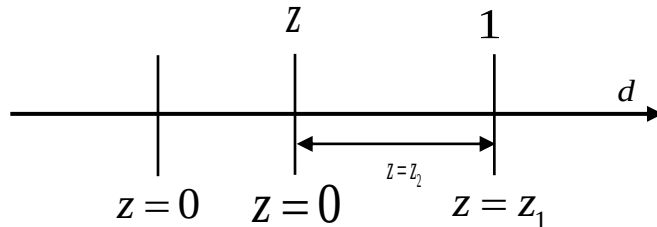
W tylnej płaszczyźnie ogniskowej soczewki mamy

$$q_3 = q_2 + f = i \frac{f^2}{z_{01}} - \text{urojony parametr } q \text{ oznacza przewężenie } q_3 = iz_{03} = \frac{f^2}{z_{01}}$$

$$w_{01} w_{03} = \sqrt{\frac{\lambda z_{01}}{\pi n}} \sqrt{\frac{\lambda z_{03}}{\pi n}} = \sqrt{\frac{\lambda^2 z_{01} z_{03}}{\pi^2 n^2}} = \frac{\lambda f}{\pi n}$$

# propagacja w.g.

$$q(z) = iz_0 + z$$



pusta przestrzeń:

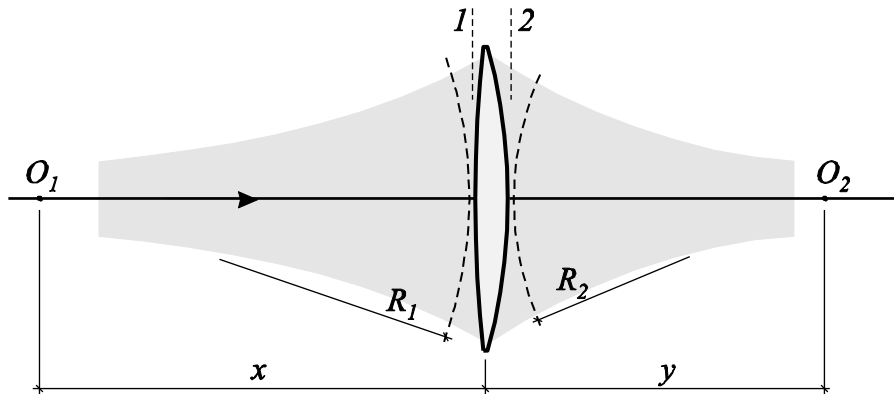
$$q_2 = iz_0 + z_2 = iz_0 + z_1 + d = q_1 + d$$

Macierz ABCD dla swobodnej propagacji to

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}$$



cieńka soczewka skupiająca o ogniskowej  $f$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f}$$

Macierz ABCD soczewki

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}$$

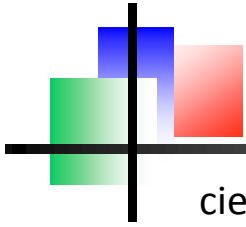
Zatem

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f} = \frac{f - q_1}{f q_1} = \frac{-\frac{1}{f} q_1 + 1}{q_1 + 0} = \frac{C q_1 + D}{A q_1 + B}$$

czyli znowu

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}$$

ogólne prawo ABCD dla wiązek gaussowskich  $q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}$



# propagacja w.g.; przykład 1

cieńka soczewka skupiająca, przewężenie wiązki wejściowej na soczewce

macierz układu

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - d/f & d \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}$$

w płaszczyźnie 1

$$q_1 = iz_{01}, \quad \frac{1}{q_1} = -\frac{i}{z_{01}}$$

Przekształcamy prawo ABCD dla wiązek gaussowskich do postaci

$$\frac{1}{q_2} = \frac{D \frac{1}{q_1} + C}{B \frac{1}{q_1} + A}$$

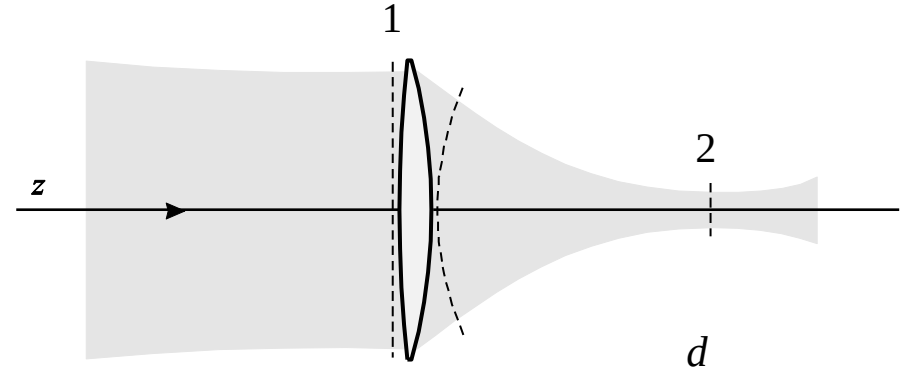
Co daje

$$\frac{1}{q_2} = \frac{\frac{1}{q_1} \frac{1}{f}}{\frac{d}{z_{01}} + 1 - \frac{d}{f}} = \frac{1}{R_2} - i \frac{\lambda}{\pi w_2}$$

rachunki ...

$$R_2 = \frac{(d/z_{01})^2 + (1 - d/f)^2}{\frac{d}{z_{01}^2} - (1/f)(1 - d/f)}$$

$$w_2 = w_1 \sqrt{(1 - d/f)^2 + (d/z_{01}^2)^2}$$



- warunek na przewężenie

$$R_2 = \infty \Rightarrow d = \frac{f}{1 + (f/z_{01})^2}$$

- rozmiar wiązki w płaszczyźnie ogniskowej

$$w_2 = w_1 \frac{f}{z_{01}} = f \frac{\lambda}{\pi w_{01}}$$