

# Podstawy Fizyki IV

## Optyka z elementami fizyki współczesnej

wykład 15, 13.04.2012

wykład:	Czesław Radzewicz
pokazy:	Radosław Chrapkiewicz, Filip Ozimek
ćwiczenia:	Ernest Grodner

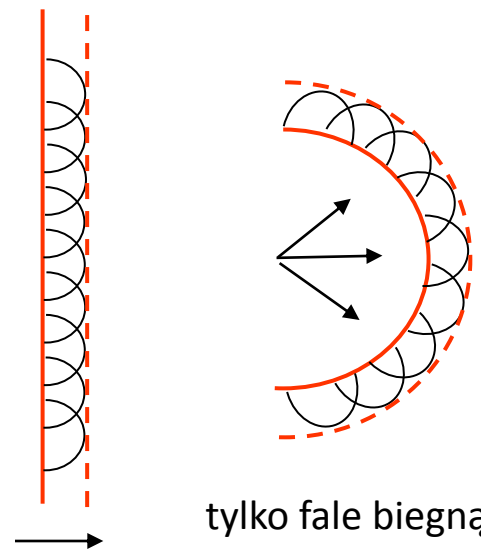
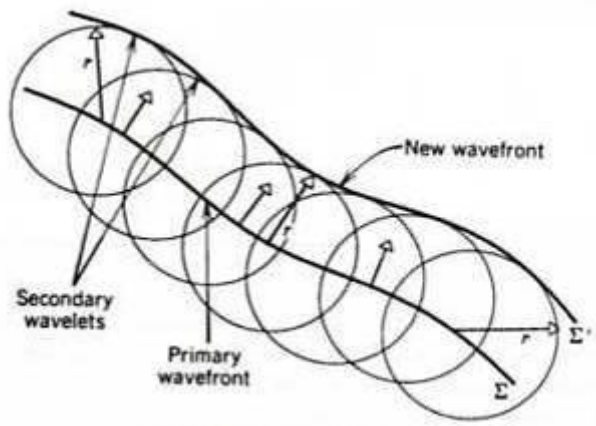
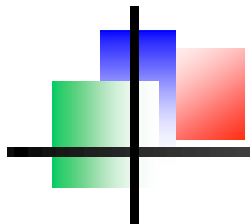


# Wykład 14 - przypomnienie

---

- interferencja nieskończenie wielu fal monochr. o różnych kierunkach  
– wiązka gaussowska, zasada nieoznaczoności
- przyosiowe r-nie Helmholtza, wyprowadzenie wiązki gaussowskiej
- wiązki TEM
- własności wiązki gaussowskiej
- parametr  $M^2$
- prawo ABCD dla wiązek gaussowskich

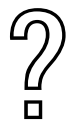
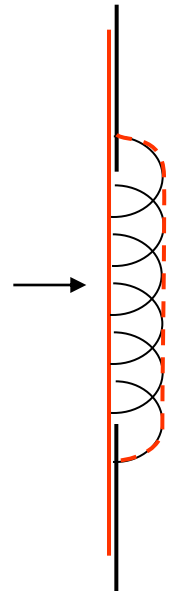
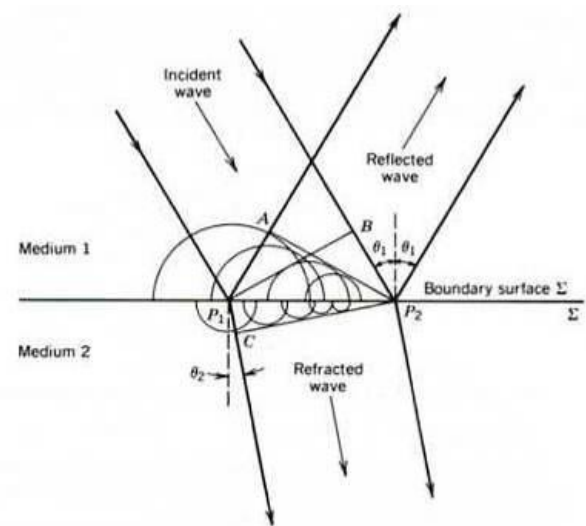
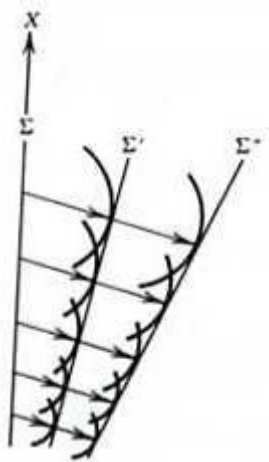
# konstrukcja Huygensa, 1



tylko fale biegnące do przodu!!!

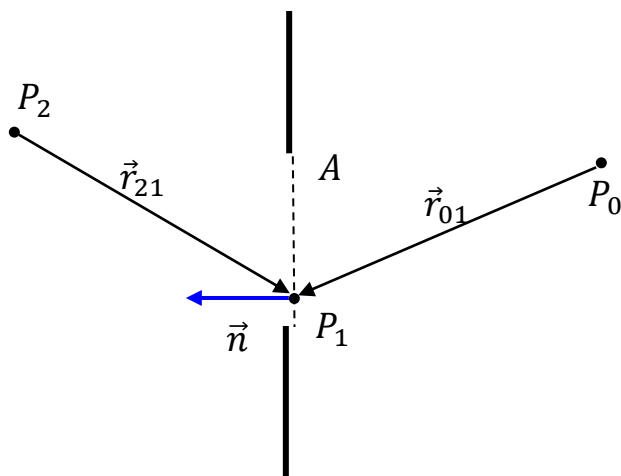


Christiaan Huygens  
1629-1695



# całka Fresnela-Kirchoffa

model skalarny (zaniedbujemy polaryzację światła)



pole na powierzchni  $A$

$$E_A = \frac{E}{r_{21}} e^{ikr_{21}}$$

wkład do pola w  $P_0$  od elementu  $dA$

$$dE_0 = \frac{E_A}{r_{01}} e^{ikr_{01}} dA = \frac{E}{r_{21}r_{01}} e^{ik(r_{01}+r_{21})} dA$$

Formuła Kirchoffa-Fresnela

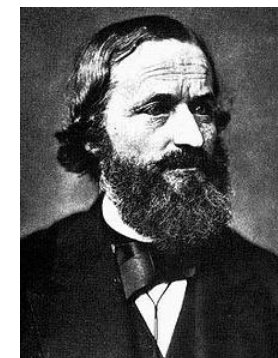
$$E(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint \frac{e^{ik(r_{01}+r_{21})}}{r_{21}r_{01}} \frac{\cos \Theta_0 - \cos \Theta_2}{2} dA$$

gdzie kąty  $\Theta_0$  i  $\Theta_2$  to

$$\Theta_0 = \sphericalangle(\vec{n}, \vec{r}_{01}), \quad \Theta_2 = \sphericalangle(\vec{n}, \vec{r}_{21})$$



Augustine Fresnel  
1788-1827



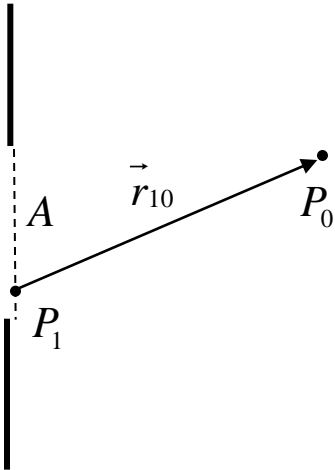
Gustaw Kirchoff  
1824-1887

Całkę Kirchoffa można wyprowadzić z twierdzenia Greena i równania Helmholtza

# Formuła Sommerfelda



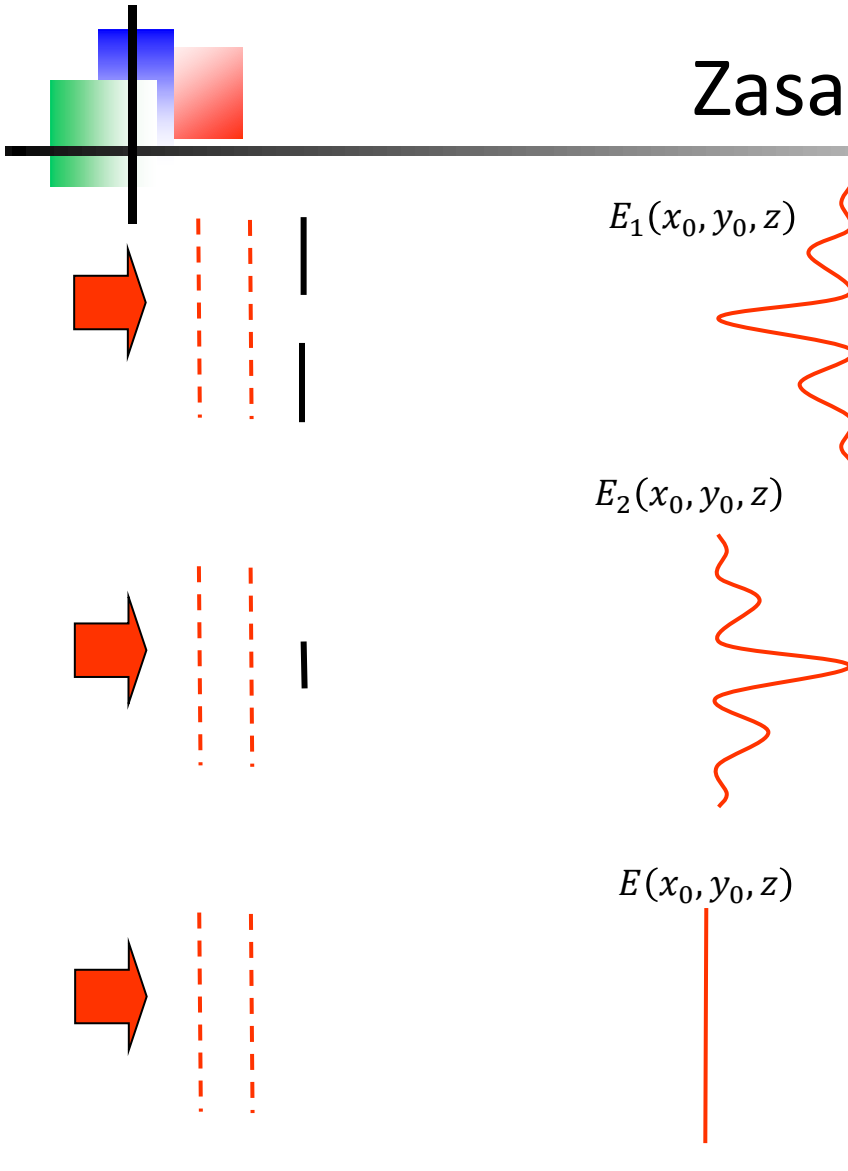
Arnold Sommerfeld  
1868-1951



Formuła Sommerfelda

$$E(x_0, y_0, z) = \frac{1}{i\lambda} \iint_A E(x, y, 0) \frac{z}{r_{01}} \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} dx dy$$

# Zasada Babineteta



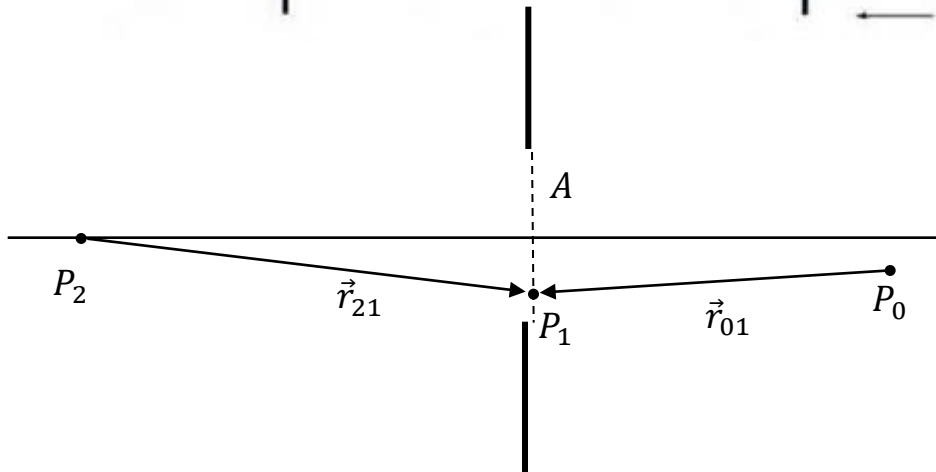
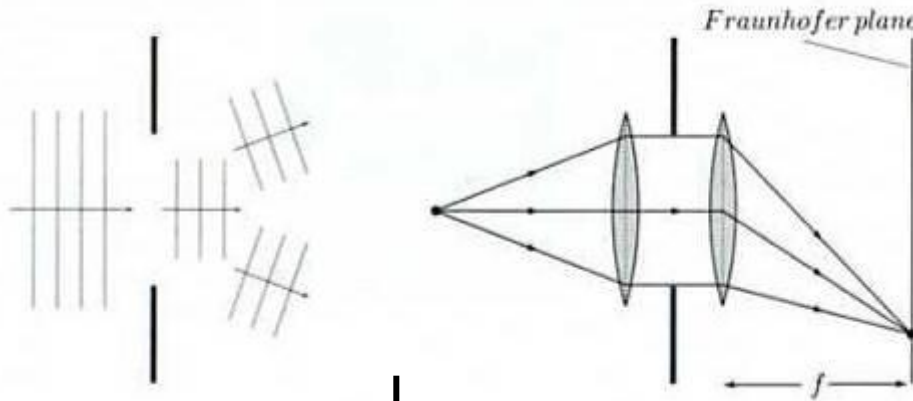
Jacques Babinet  
1794-1872

$$E(x_0, y_0, z) = E_1(x_0, y_0, z) + E_2(x_0, y_0, z)$$

Uwaga: w rzeczywistości amplituda pola jest wielkością zespoloną i rysunki powyżej należy traktować wyłącznie jako ilustrację pomysłu Babineteta a nie rzeczywiste rozkłady pola

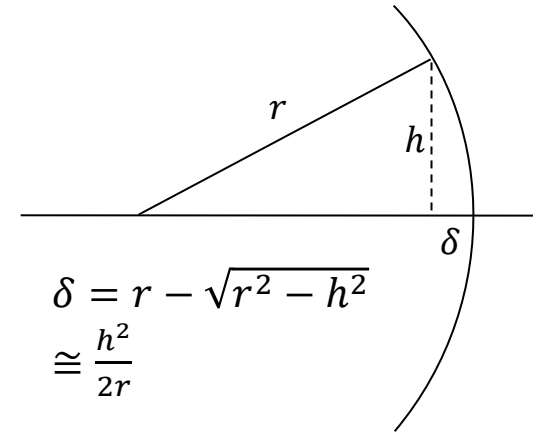
# Dyfrakcja Fraunhofer, 1

na wejściu i na wyjściu mamy fale płaskie



Przybliżenie Fraunhofer:  $\delta \cong \frac{h^2}{2} \left( \frac{1}{r_{21}} + \frac{1}{r_{01}} \right) \ll \lambda$

Liczba Fresnela  $N_F = \frac{h^2}{r\lambda}$



$$\delta = r - \sqrt{r^2 - h^2}$$

$$\cong \frac{h^2}{2r}$$

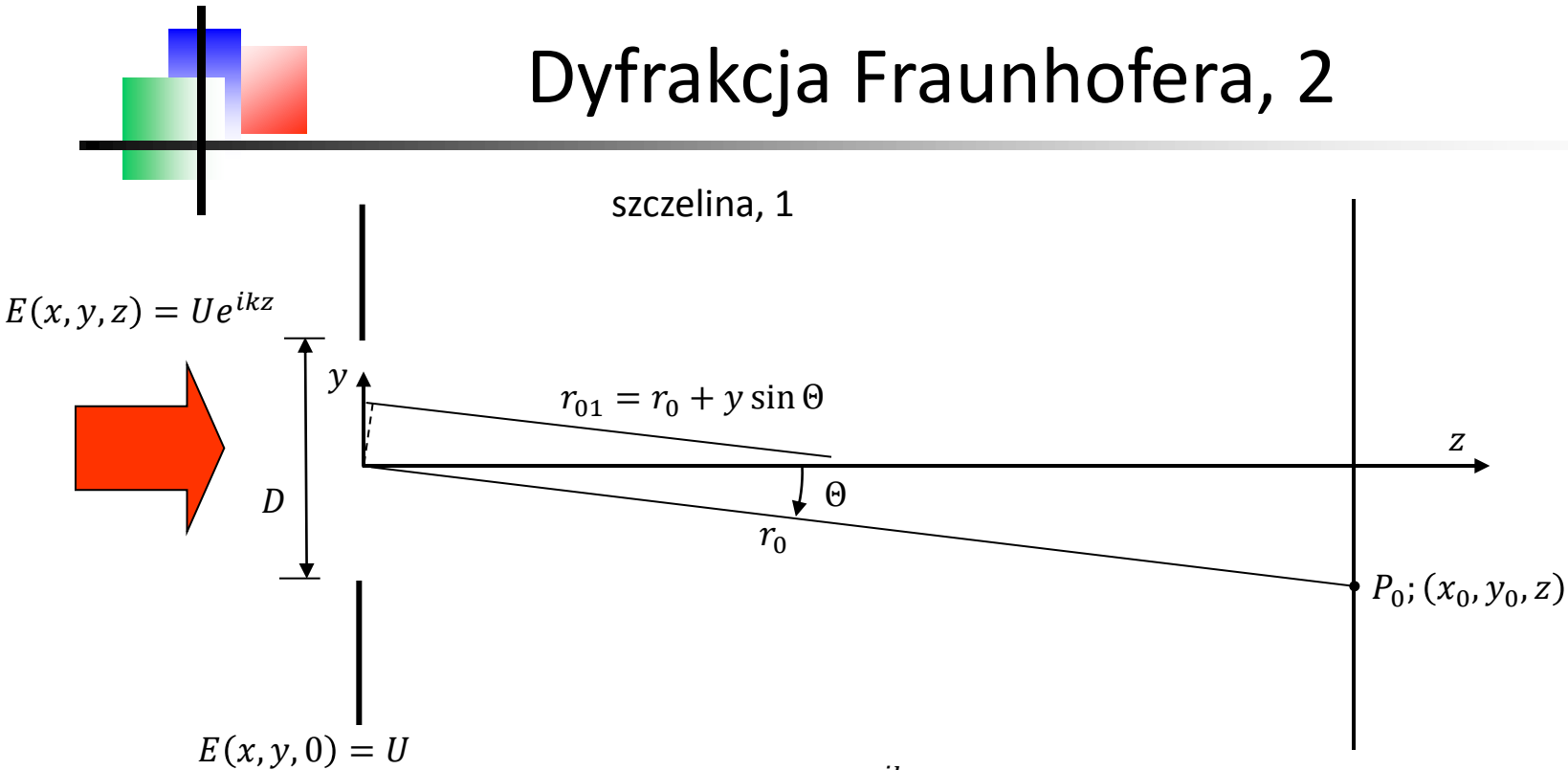
Całka F-K upraszcza się wtedy do

$$E(P_0) = C \iint_A \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} dA$$

ogólnie, dla Fraunhofera

$$E(P_0) = C \iint_A E_A \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} dA$$

# Dyfrakcja Fraunhofer, 2



$$\begin{aligned}
 E(P_0) &= C \iint_A U \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} dA = \\
 &\cong \frac{CU}{r_{01}} \iint_A e^{ikr_{01}} dx dy \\
 &= C' \int_{-D/2}^{D/2} e^{ik(r_0 + y \sin \Theta)} dy \\
 &= C'' \frac{\sin \beta}{\beta}
 \end{aligned}$$

gdzie  $\beta = \frac{kD \sin \Theta}{2}$

funkcja sinc:

$$\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$$



# Dyfrakcja Fraunhofer, 3

szczelina, 2

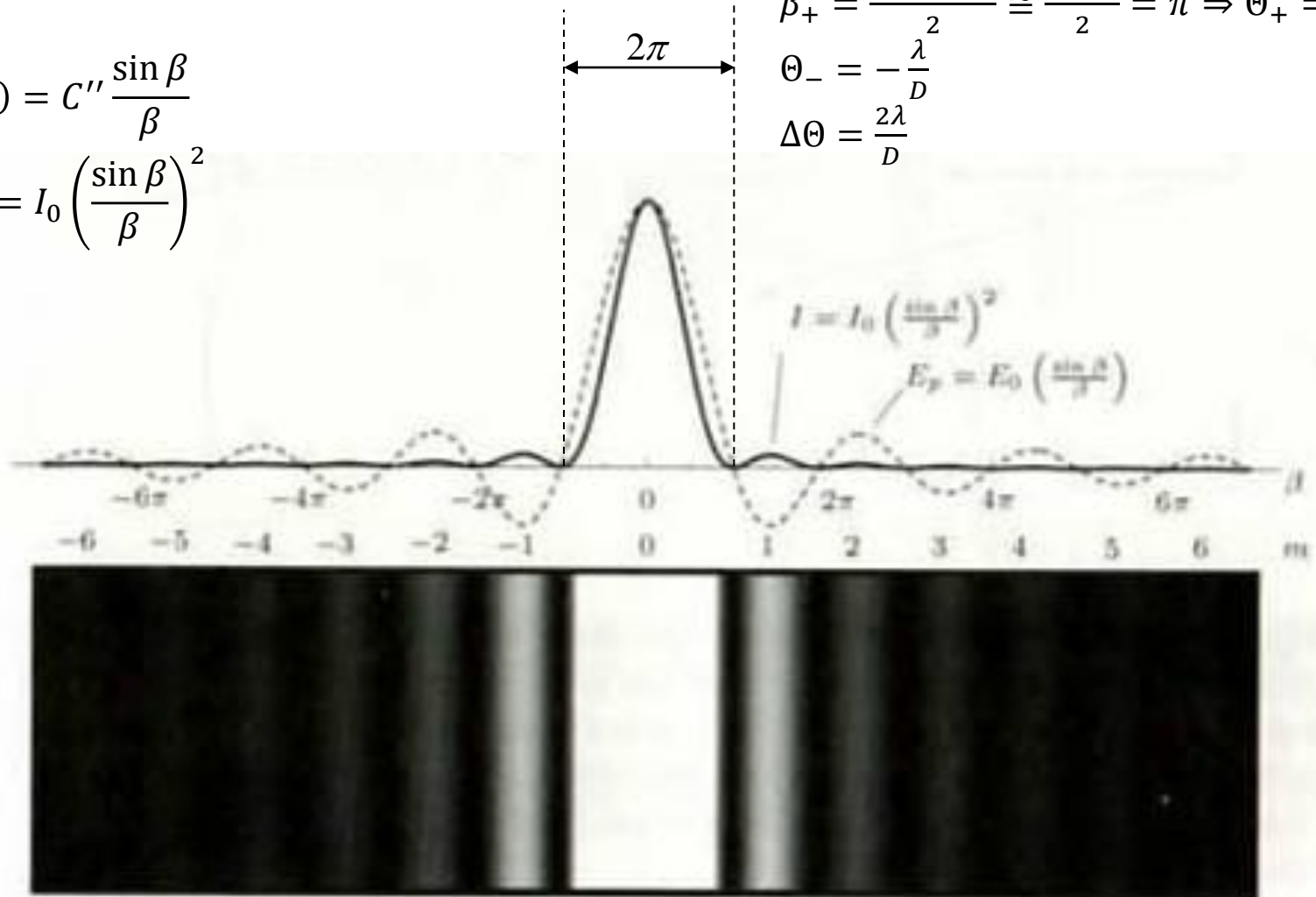
$$E(\beta) = C'' \frac{\sin \beta}{\beta}$$

$$I(\beta) = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

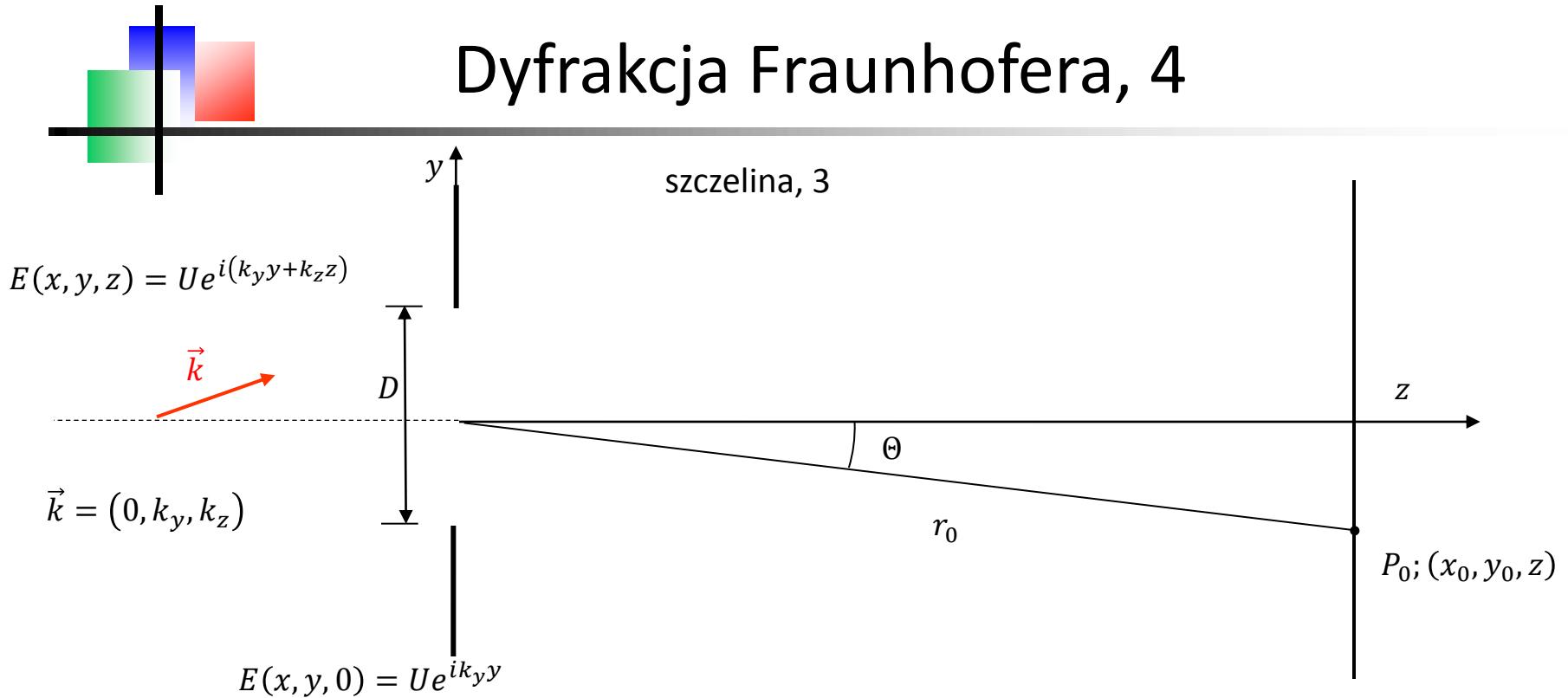
$$\beta_+ = \frac{kD \sin \Theta_+}{2} \cong \frac{kD\Theta_+}{2} = \pi \Rightarrow \Theta_+ = \frac{\lambda}{D}$$

$$\Theta_- = -\frac{\lambda}{D}$$

$$\Delta\Theta = \frac{2\lambda}{D}$$



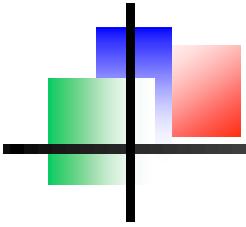
# Dyfrakcja Fraunhofer, 4



$$\begin{aligned}
 E(P_0) &= C \iint_A E(x, y, 0) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} dA = \\
 &\cong \frac{CU}{r_{01}} \iint_A e^{ikr_{01}} e^{ik_y y} dx dy \\
 &= C' \iint_A e^{ik(r_0 - y \sin \Theta) + ik_y y} dy \\
 &= C'' \frac{\sin \beta}{\beta}
 \end{aligned}$$

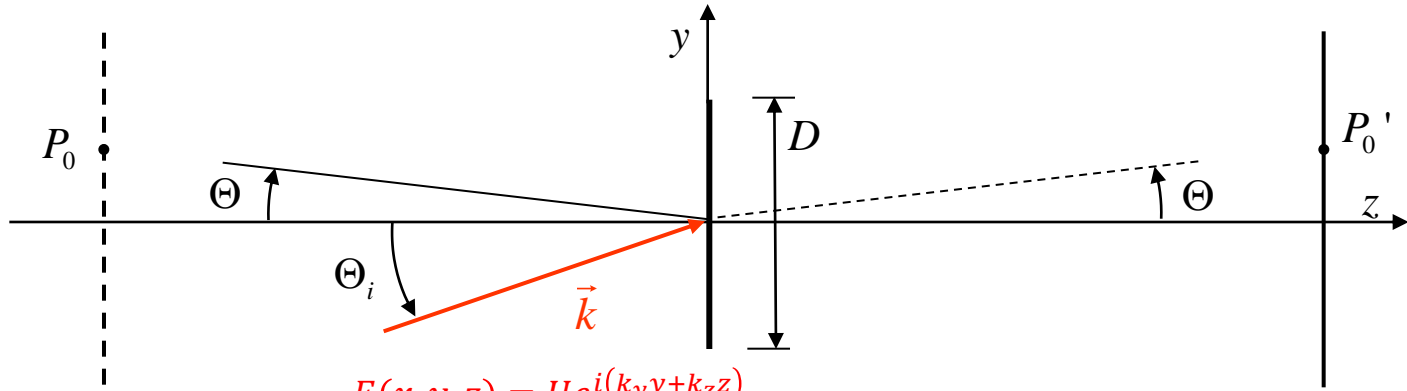
gdzie  $\beta = \frac{D(k \sin \Theta - k_y)}{2}$

centralny prążek dla  
 $\sin \Theta = k_y / k$



# Dyfrakcja Fraunhofer, 5

odbicie od wąskiego lustra



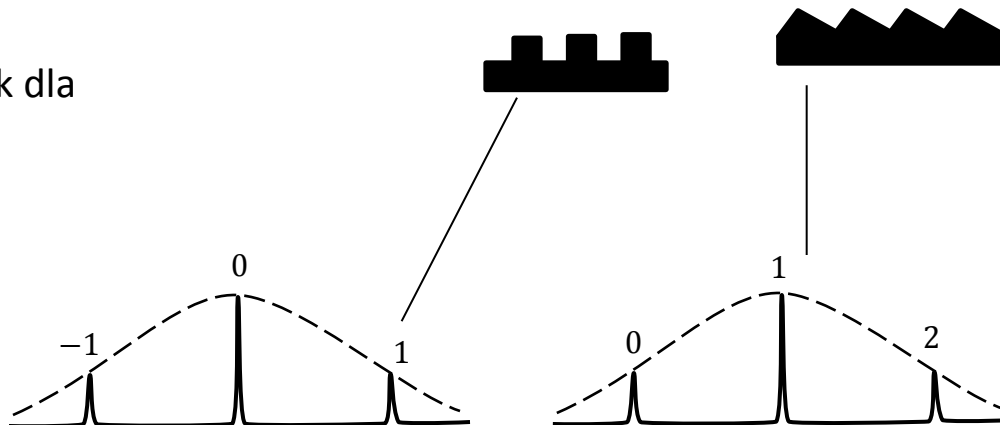
$$E(x, y, z) = U e^{i(k_y y + k_z z)}$$

$$\vec{k} = (0, k \sin \Theta_i, k \cos \Theta_i)$$

$$E(P_0) = C'' \frac{\sin \beta}{\beta}$$

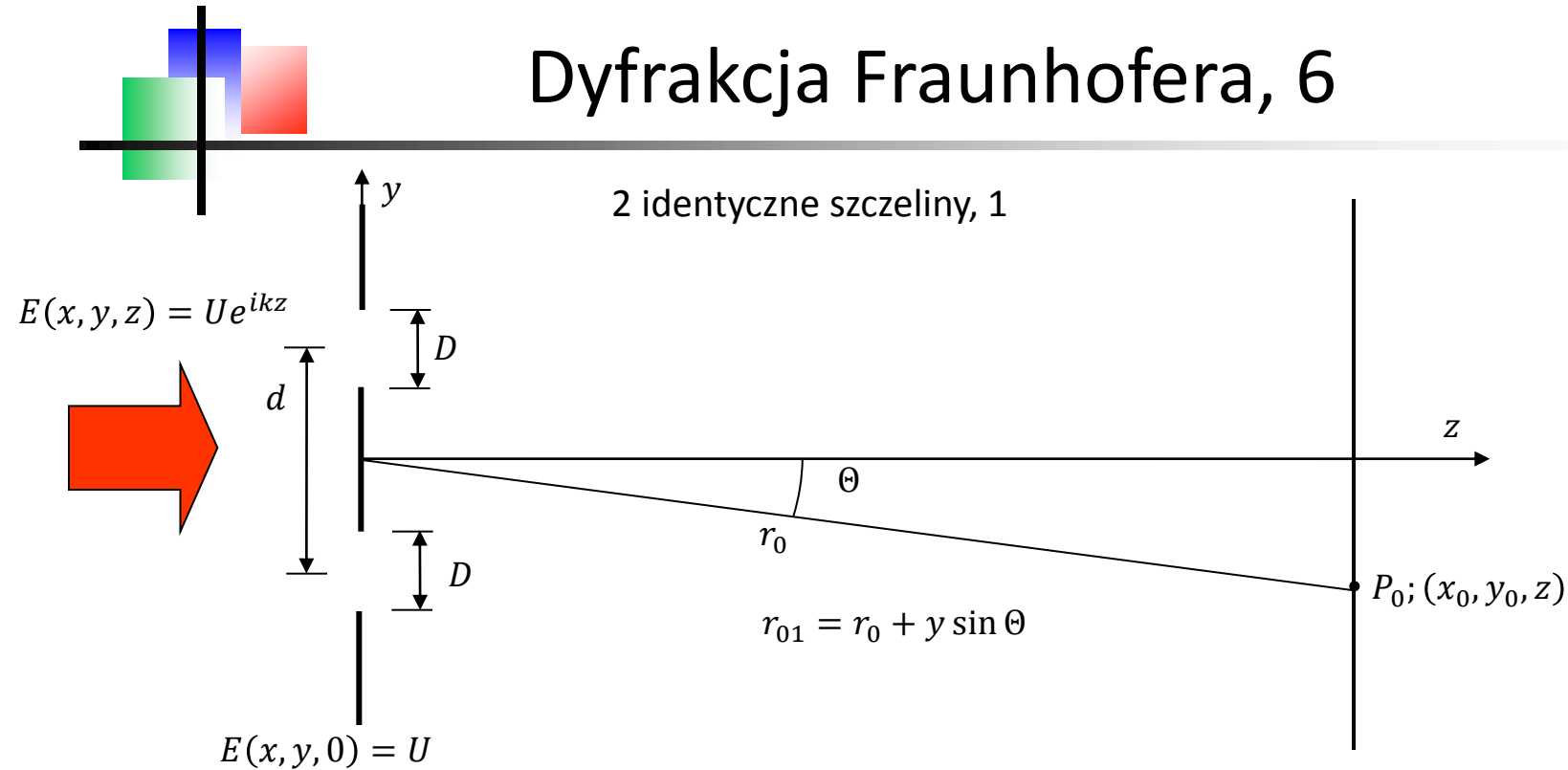
$$\beta = \frac{D(k \sin \Theta_i - k \sin \Theta)}{2}$$

centralny prążek dla  
 $\Theta = \Theta_i$



kąt odbłysku  
(ang. blaze angle)

# Dyfrakcja Fraunhofer, 6



$$E(P_0) = C \int_{-(d+D)/2}^{-(d-D)/2} e^{ik(r_0 - y \sin \Theta)} dy + C \int_{(d-D)/2}^{(d+D)/2} e^{ik(r_0 - y \sin \Theta)} dy$$

$$= \dots = C'' \frac{\sin \beta}{\beta} \cos \gamma$$

gdzie

$$\beta = \frac{kD \sin \Theta}{2}, \quad \gamma = \frac{kd \sin \Theta}{2}$$

# Dyfrakcja Fraunhofer, 7

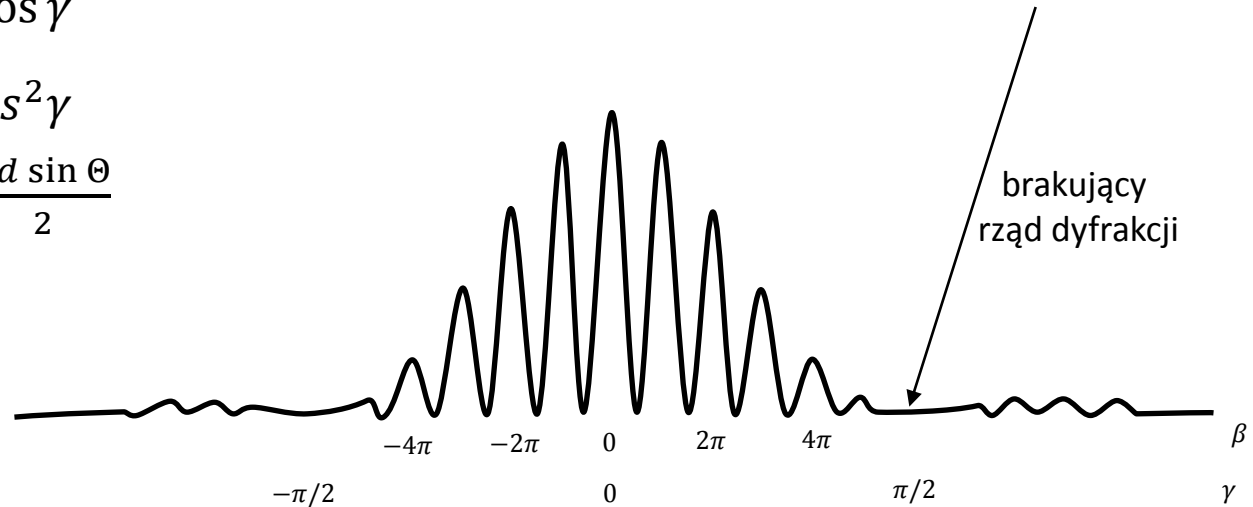
2 identyczne szczeliny, 2

$$\gamma = \frac{kd \sin \Theta_{+1}}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \Theta_{+1} = \frac{\lambda}{2d}$$

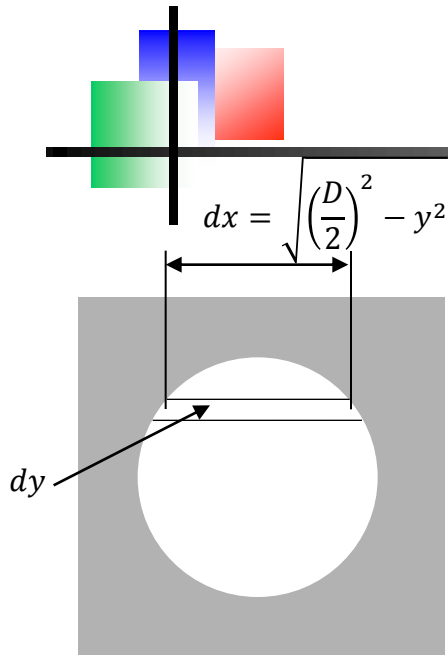
$$E(P_0) = C'' \frac{\sin \beta}{\beta} \cos \gamma$$

$$I(P_0) = I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \cos^2 \gamma$$

$$\beta = \frac{kD \sin \Theta}{2}, \quad \gamma = \frac{kd \sin \Theta}{2}$$

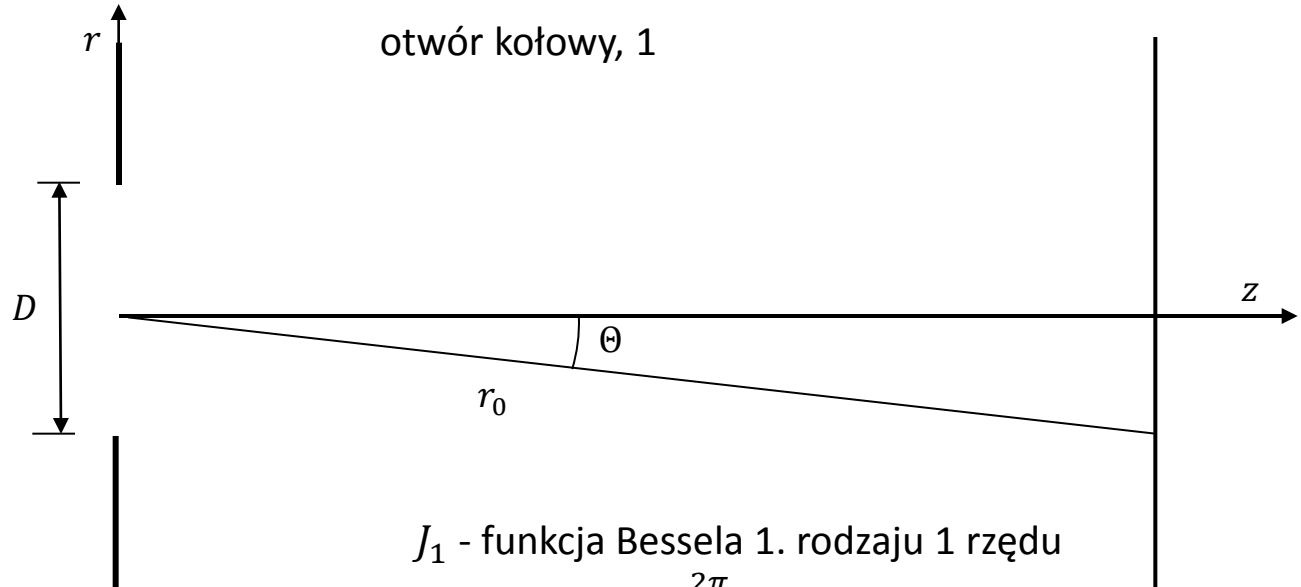


# Dyfrakcja Fraunhofera, 8



$$dx = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - y^2}$$

$dy$



otwór kołowy, 1

$J_1$  - funkcja Bessela 1. rodzaju 1 rzędu

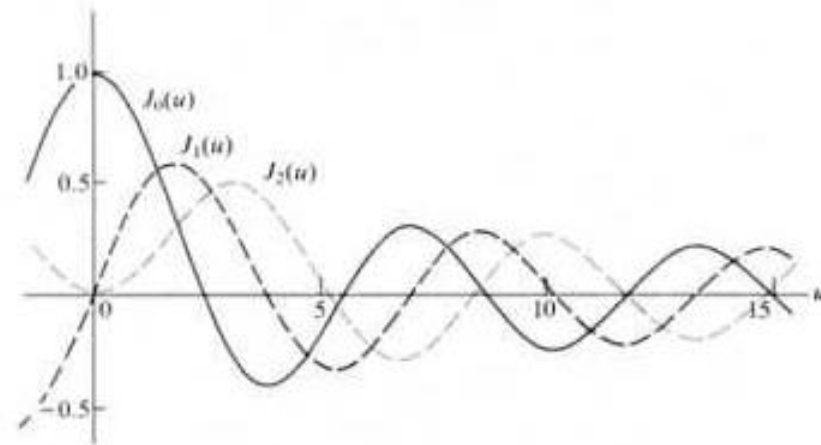
$$J_1(\sigma) = \frac{i^{-m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(mv + \sigma \cos v)} dv$$

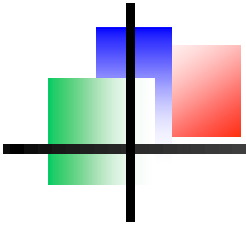
$$E(P_0) = C \iint_A E(x, y, 0) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} dA =$$

$$\cong C' \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} e^{iky \sin \theta} \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - y^2} dy$$

$$= C'' \frac{J_1(\sigma)}{\sigma}$$

gdzie  $\sigma = \frac{kD \sin \theta}{2}$





# Dyfrakcja Fraunhofer, 9

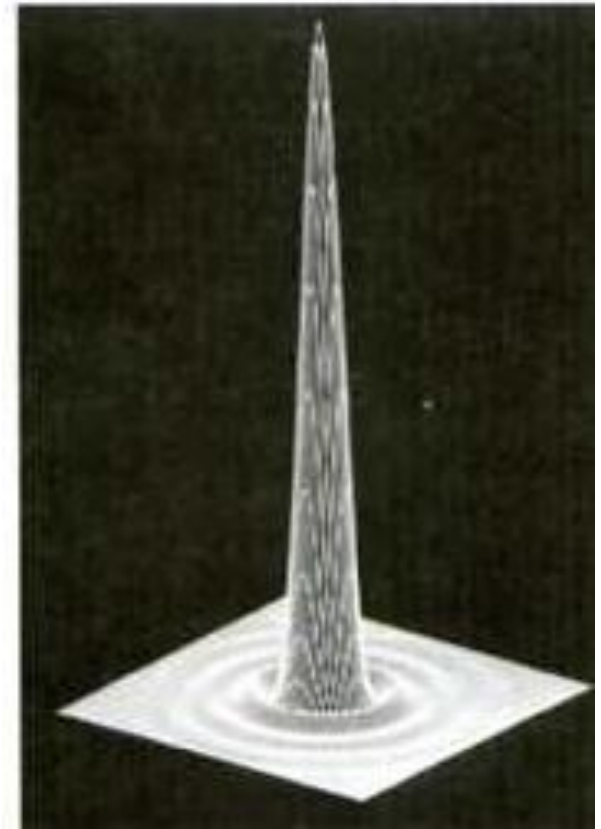
otwór kołowy, 2

$$E(P_0) = C'' \frac{J_1(\sigma)}{\sigma}$$

$$I(P_0) = I_0 \left( \frac{J_1(\sigma)}{\sigma} \right)^2$$

$$\sigma = \frac{kD \sin \theta}{2}$$

dysk Airy

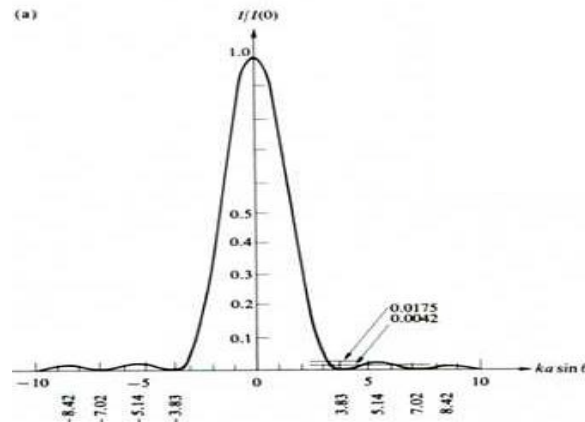


Pierwszy ciemny pierścień dla:

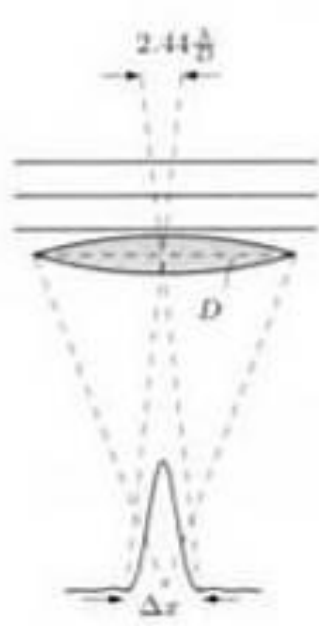
$$\sigma = \frac{kD \sin \theta}{2} = \frac{\pi D \sin \theta}{\lambda} \cong 3.83$$

skąd

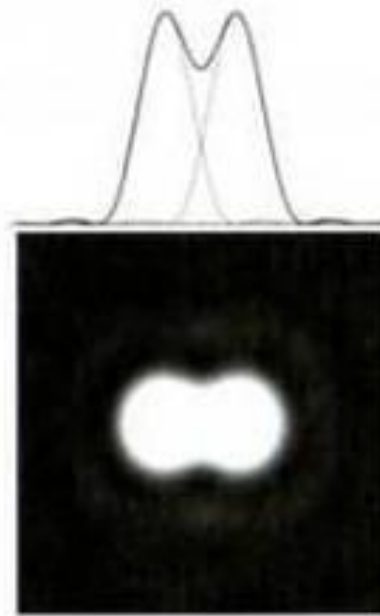
$$\sin \theta \cong \frac{3.83 \lambda}{\pi D} \cong 1.22 \frac{\lambda}{D}$$



# Dyfr. Fraunhofera, rozdzielczość obrazowania



(a)



(b)

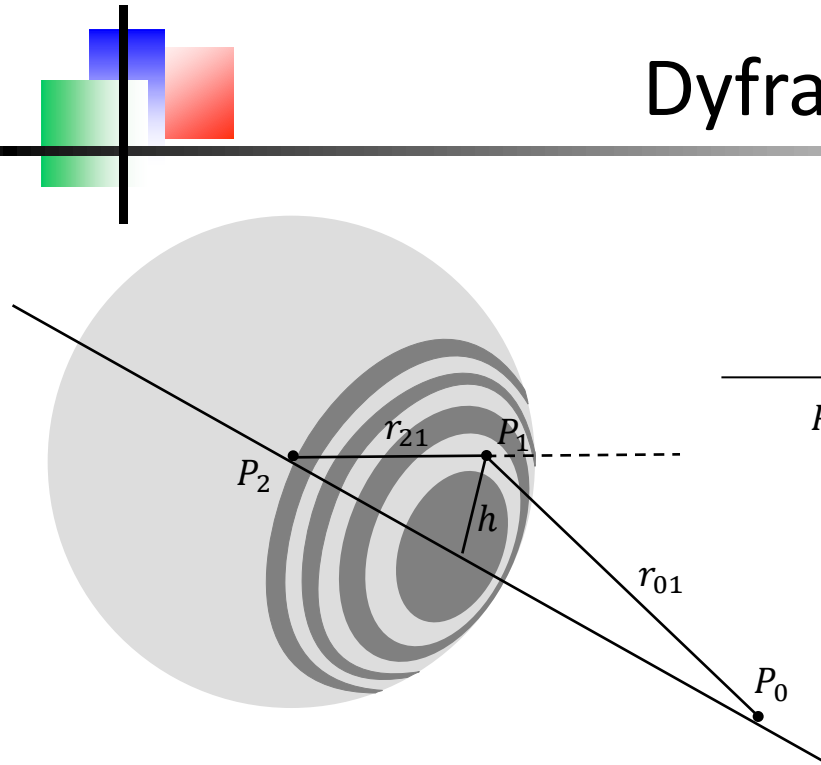


(c)

$$\sin \theta \cong \frac{3.83 \lambda}{\pi D} \cong 1.22 \frac{\lambda}{D}$$



# Dyfrakcja Fresnela



$$\begin{aligned}
 r_{01} + r_{21} &= \sqrt{z_0^2 + h^2} + \sqrt{z_2^2 + h^2} \\
 &= z_0 \left( 1 + \frac{h^2}{2z_0^2} - \frac{h^4}{8z_0^4} + \dots \right) + z_2 \left( 1 + \frac{h^2}{2z_2^2} - \frac{h^4}{8z_2^4} + \dots \right) \\
 &\cong z_0 + z_2 + \frac{h^2}{2} \left( \frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_2} \right) - \frac{h^4}{8} \left( \frac{1}{z_0^3} + \frac{1}{z_2^3} \right) + \dots
 \end{aligned}$$

Formuła Kirchoffa-Fresnela

$$\begin{aligned}
 E(P_0) &= \frac{1}{i\lambda} \iint_A \frac{e^{ik(r_{01}+r_{21})}}{r_{21}r_{01}} \frac{\cos \Theta_0 - \cos \Theta_2}{2} dA \\
 &\cong \frac{1}{i\lambda z_0 z_2} \iint_A e^{ik(r_{01}+r_{21})} dA
 \end{aligned}$$

Rozwinięcie w szereg Taylora

$$\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots$$

przypomnienie: przybliżenie Fraunhoffera

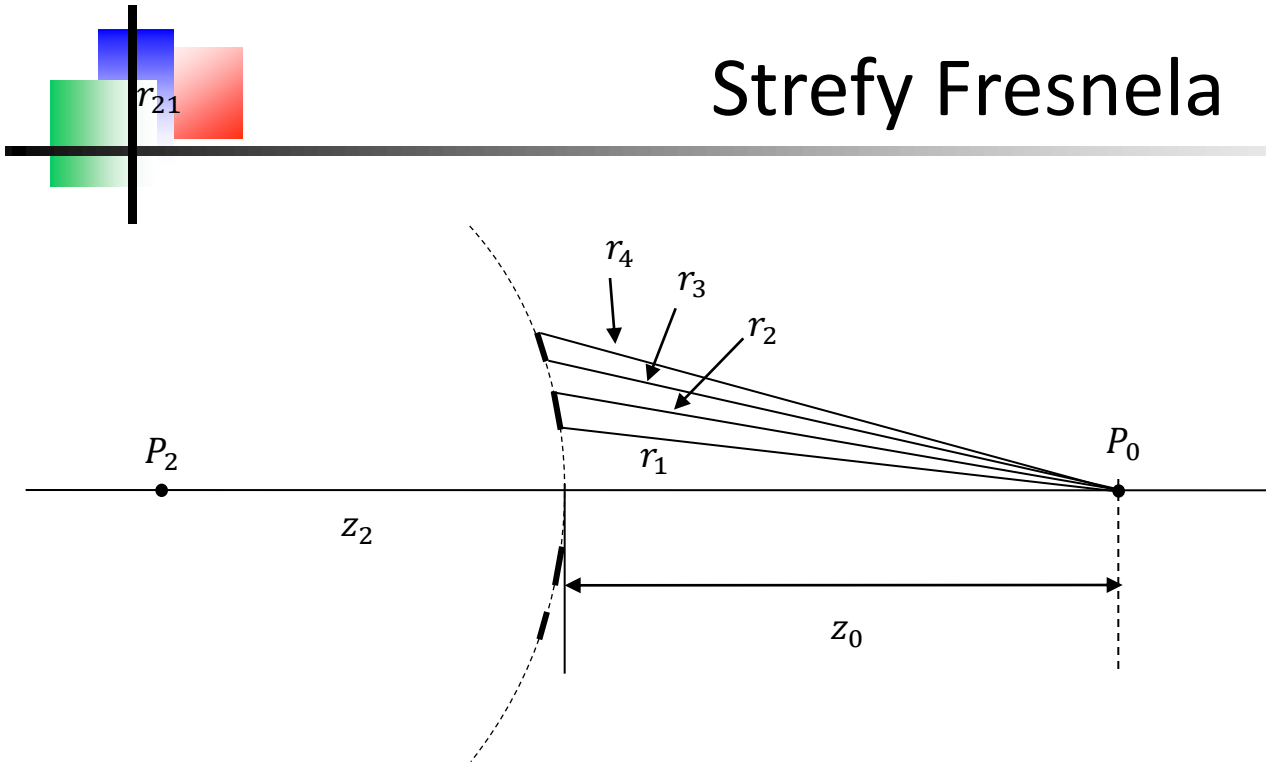
$$\frac{h^2}{2} \left( \frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_2} \right) \ll \lambda$$

przybliżenie Fresnela

$$\frac{h^4}{8} \left( \frac{1}{z_0^3} + \frac{1}{z_2^3} \right) \ll \lambda$$

$$r_{01} + r_{21} \cong z_0 + z_2 + \frac{h^2}{2} \left( \frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_2} \right)$$

# Strefy Fresnela



$$r_1 = z_0 + \frac{\lambda}{2}$$

$$r_2 = z_0 + 2\frac{\lambda}{2}$$

$$\dots$$

$$r_m = z_0 + m\frac{\lambda}{2}$$

Formuła Kirchoffa-Fresnela

$$E(P_0) \cong \frac{1}{i\lambda z_0 z_2} \iint_A e^{ik(r_{01} + r_{21})} dA$$

Strefy:

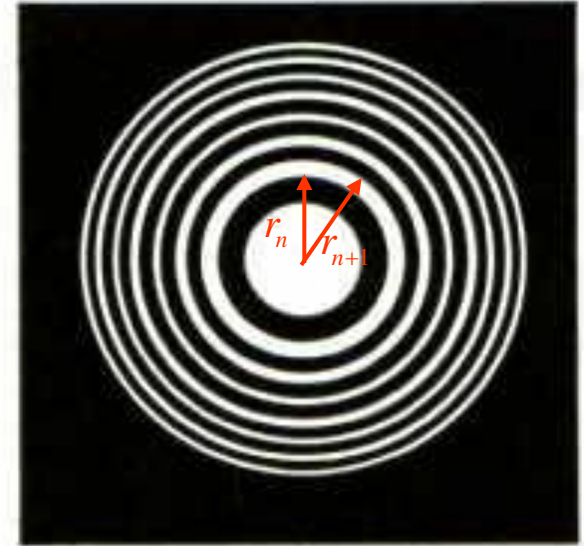
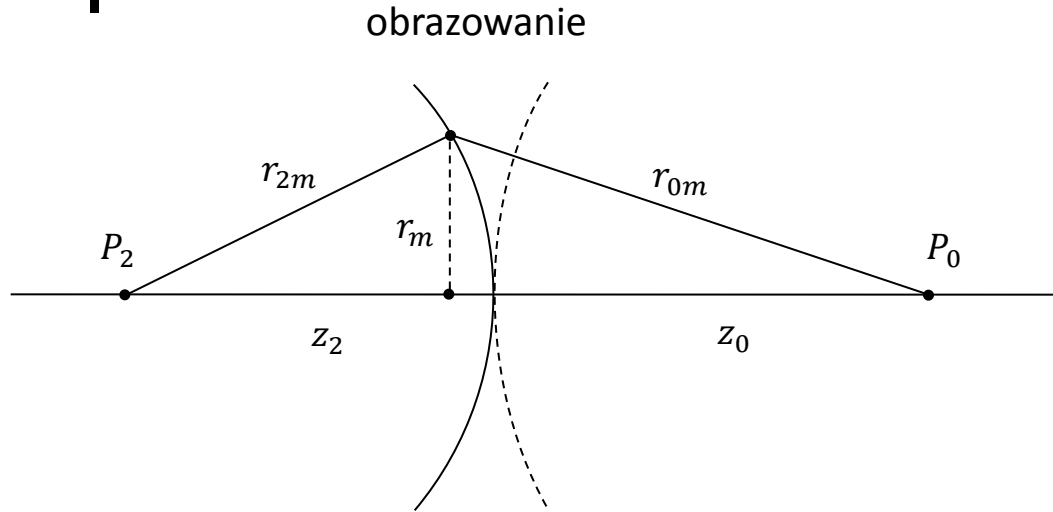
1. Obszar ograniczony  $r_1$  daje pole  $E_0$
2. Pierścień ograniczony przez  $r_1 \div r_2$  daje pole  $E_1$
3. Pierścień ograniczony przez  $r_2 \div r_3$  daje pole  $E_2$
4. Pierścień ograniczony przez  $r_3 \div r_4$  daje pole  $E_3$
5. ....

Pole całkowite:

$$E = E_0 + E_1 + E_2 + E_3 + \dots$$

$$\cong E_0 - |E_1| + E_2 - |E_3| + \dots$$

# Płytką strefowa Fresnela



$$r_{2m} + r_{0m} - (z_2 + z_0) = m \frac{\lambda}{2}$$
$$\sqrt{z_2^2 + r_m^2} + \sqrt{z_0^2 + r_m^2} - (z_2 + z_0) = m \frac{\lambda}{2}$$

dla rozsądnej jasności

$$r_{2m} \cong z_2 + \frac{r_m^2}{2z_2}, r_{0m} \cong z_0 + \frac{r_m^2}{2z_0}$$

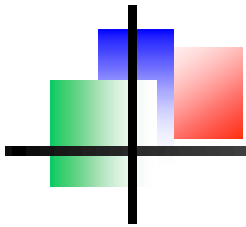
skąd

$$\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_0} = \frac{m\lambda}{r_m^2}$$

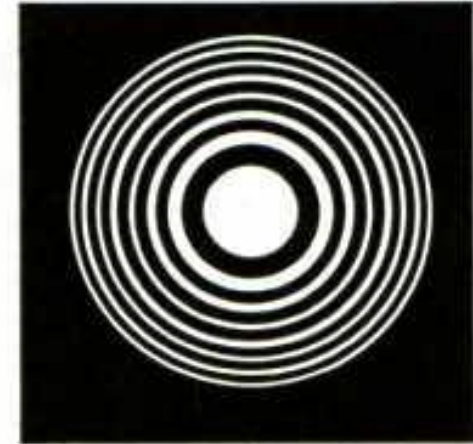
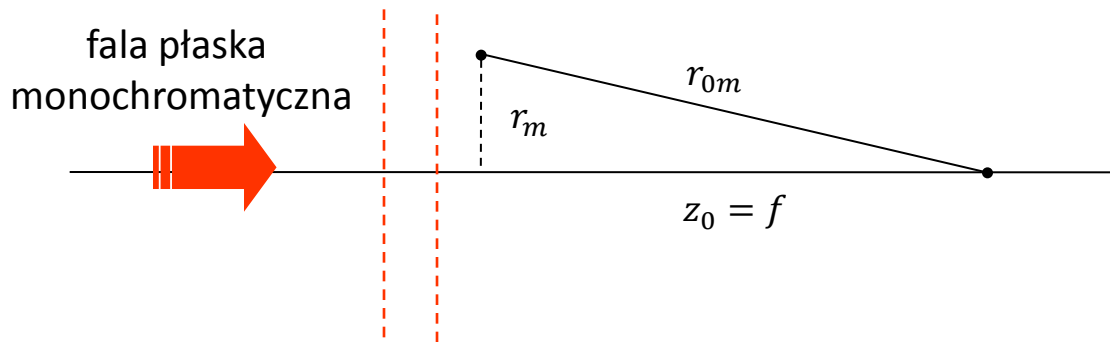
czyli

$$r_m = \sqrt{\frac{m\lambda}{\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_0}}}$$

# Płytką strefowa Fresnela



ogniskowanie



Dla  $z_2 = \infty$  mamy ogniskowanie;  $r_m = \sqrt{m\lambda f}$

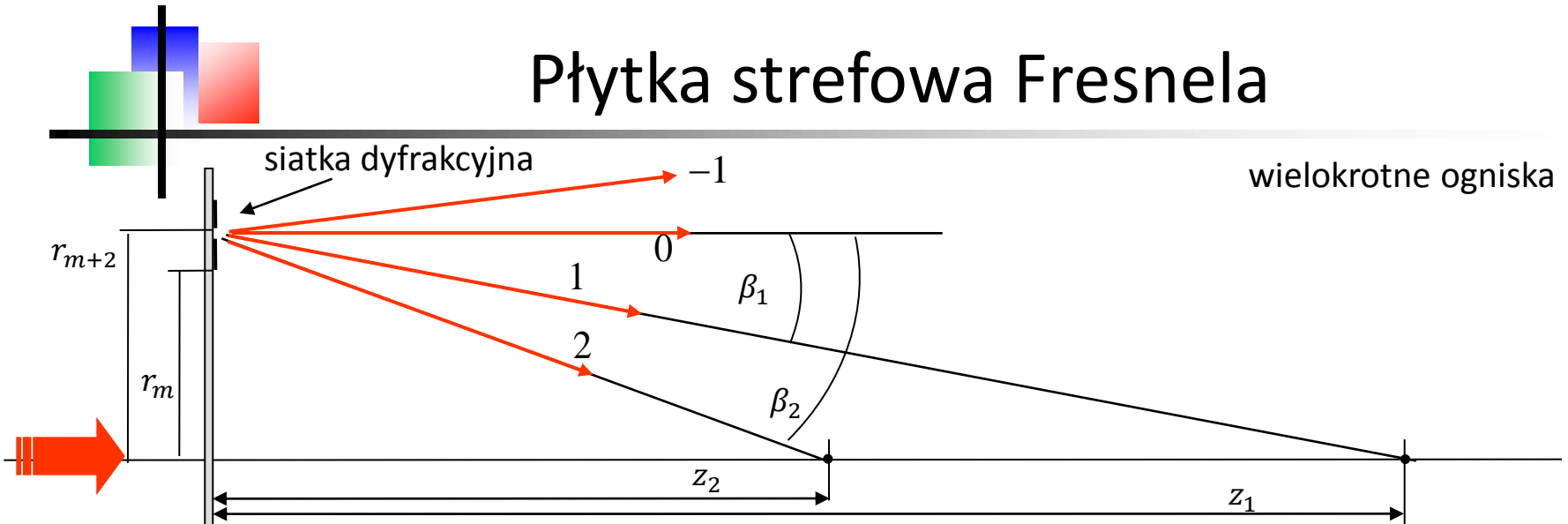
Uwaga na aberracje chromatyczne soczewki Fresnela; jeśli mamy soczewkę o danej ogniskowej  $f_1$  dla danej długości fali  $\lambda_1$  to

$$\frac{1}{f_1} = \frac{m\lambda_1}{r_{m1}^2} \Rightarrow r_{m1}^2 = m\lambda_1 f_1$$

i dla innej długości fali  $\lambda_2$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{m\lambda_2}{r_{m1}^2} = \frac{m\lambda_2}{m\lambda_1 f_1} \Rightarrow f_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} f_1$$

# Płytkę strefowa Fresnela



Lokalnie traktujemy płytkę strefową Fresnela jak siatkę dyfrakcyjną, która ugina światło tak, że trafia ono do ogniska. Aby tak było stała siatki dyfrakcyjnej musi spełniać r-nie

$$d = r_{m+2} - r_m = \sqrt{(m+2)\lambda f} - \sqrt{m\lambda f}$$

$$= \sqrt{\lambda f} (\sqrt{m+2} - \sqrt{m}) = \sqrt{\lambda f} \sqrt{m} \left( \sqrt{1 + \frac{2}{m}} - 1 \right) \cong \sqrt{\frac{\lambda f}{m}}$$

wzór siatkowy w przybliżeniu przyosiowym:  $\sin \beta_l \cong \beta_l = l \frac{\lambda}{d}, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$z_1 \cong \frac{r_m}{\beta_1} = \frac{\sqrt{m\lambda f}}{\lambda} \sqrt{\frac{\lambda f}{m}} = f$$

$$z_l = \frac{f}{l}, l = 3, 5, 7, \dots$$

ogniska tylko dla nieparzystych  $l$ . Zastanów się dlaczego.

Fazowa płytkę strefowa Fresnela

