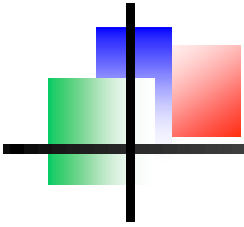


Podstawy Fizyki IV

Optyka z elementami fizyki współczesnej

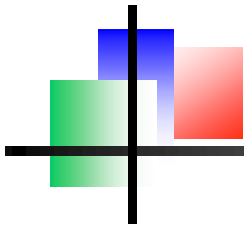
wykład 16, 16.04.2012

wykład:	Czesław Radzewicz
pokazy:	Radosław Chrapkiewicz, Filip Ozimek
ćwiczenia:	Ernest Grodner



Wykład 15 - przypomnienie

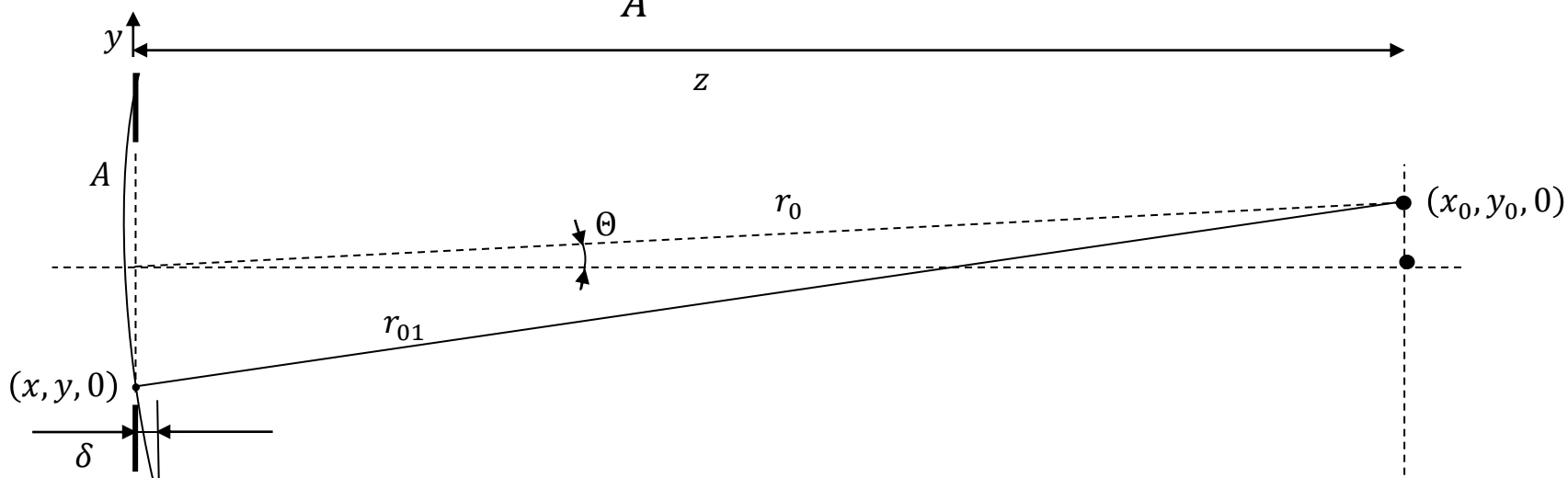
- przepis Huygensa na propagację fali
- całka Fresnela-Kirchoffa, całka Sommerfelda
- zasada Babineta
- dyfrakcja Fraunhofera
 - przybliżenie dalekiego pola
 - szczelina, szczelina pod kątem, dwie szczeliny, otwór kołowy
- przybliżenie Fresnela
- strefy Fresnela
- płytka strefowa Fresnela



Przybliżenie Fraunhofera

Formuła Sommerfelda

$$E(x_0, y_0, z) = \frac{1}{i\lambda} \iint_A E(x, y, 0) \frac{z}{r_{01}} \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} dx dy$$



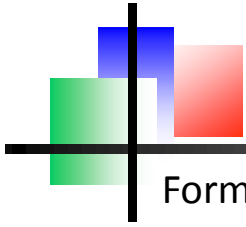
Krok 1: wymieniamy r_{01} na z w mianowniku wyrażenia podcałkowego

$$E(x_0, y_0, z) = \frac{1}{i\lambda z} \iint_A E(x, y, 0) e^{ikr_{01}} dx dy$$

Krok 2:

zakładamy: $\delta \cong \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2z} \ll \lambda$ i zastępujemy wycinek okręgu przez odcinek prosty

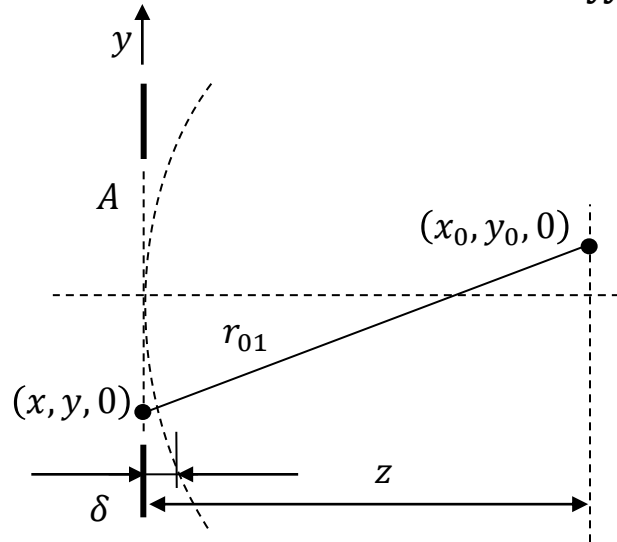
$$r_{01} \cong r_0 - k \frac{y}{z} \Rightarrow E(x_0, y_0, z) = \frac{1}{i\lambda z} \iint E(x, y, 0) e^{ik(r_0 - k \frac{y}{z})} dx dy$$



Przybliżenie Fresnela

Formuła Sommerfelda

$$E(x_0, y_0, z) = \frac{1}{i\lambda} \iint_A E(x, y, 0) \frac{z}{r_{01}} \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} dx dy$$



Krok 1: $E(x_0, y_0, z) = \frac{1}{i\lambda z} \iint_A E(x, y, 0) e^{ikr_{01}} dx dy$

Krok 2: rozwijamy pierwiastek kwadr. w szer. Taylora:

$$r_{01} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{z^2}}$$

$$\cong z + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2z} - \frac{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^2}{8z^3}$$

Jeśli

$$[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^2 \ll 8z^3 \lambda$$

to

$$r_{01} \cong z + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2z}$$

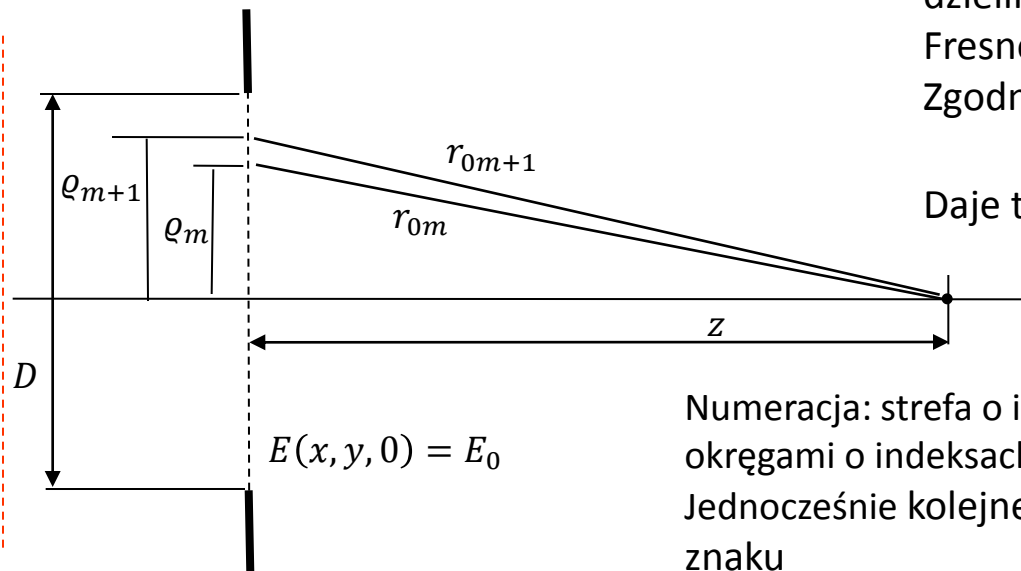
i

$$E(x_0, y_0, z) \cong \frac{1}{i\lambda z} e^{ikz} \iint_A E(x, y, 0) e^{i\frac{k}{2z}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]} dx dy$$

faza odpowiada sferze a nie powierzchni otworu

metoda obrazkowa – otw. kołowy, 1

otwór kołowy, pole na osi



dzielimy otwór na koncentryczne strefy
Fresnela i sumujemy ich wkłady do pola.
Zgodnie z wykładem 15 przyjmujemy

$$\rho_m = \sqrt{m\lambda z}$$

Daje to stałą powierzchnię strefy

$$\pi \rho_{m+1}^2 - \pi \rho_m^2 = \pi \lambda z$$

Numeracja: strefa o indeksie m jest ograniczona
okręgami o indeksach $2m + 1$ oraz $2m$.

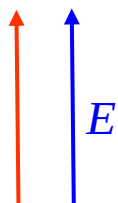
Jednocześnie kolejne strefy dają pole o przeciwnym
znaku

$$e^{ik\rho_{2m+1}} = -e^{ik\rho_{2m}}$$

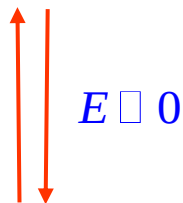
Czyli

$$E = |E_1| - |E_2| + |E_3| - |E_4| + \dots$$

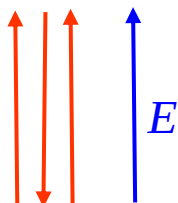
$l \leq 1$



$l = 2$



$l = 3$



...

Liczba stref:

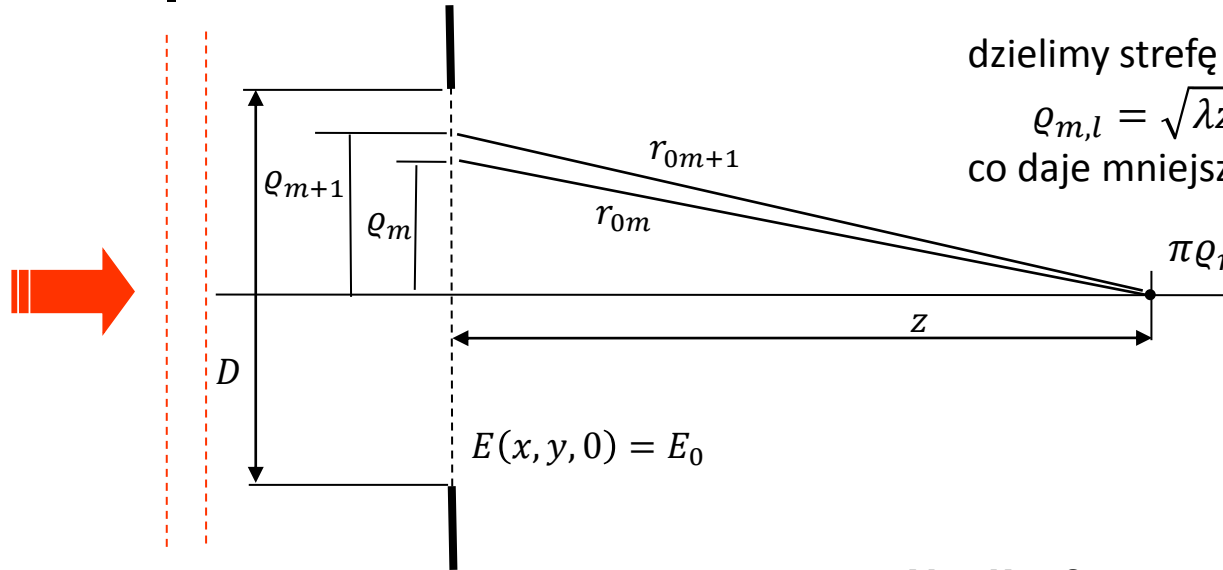
$$m \cong \frac{\frac{\pi D^2}{4}}{\pi \lambda z} = \frac{D^2}{4\lambda z}$$

• Fraunhofer $\frac{D^2}{4\lambda z} \ll 1$

• Fresnel $1 < \frac{D^2}{4\lambda z} \ll \frac{z^2}{D^2}$

metoda obrazkowa – otw. kołowy, 2

otwór kołowy, pole na osi, trochę dokładniej



dzielimy strefę Fresnela na N węższych pierścieni

$$q_{m,l} = \sqrt{\lambda z (m + l/N)}, \quad l = 1, 2, \dots, N$$

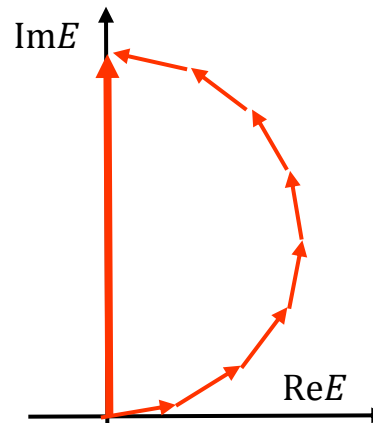
co daje mniejszą powierzchnię strefy

$$\pi q_{m,l+1}^2 - \pi q_{m,l}^2 = \frac{\pi \lambda z}{N}$$

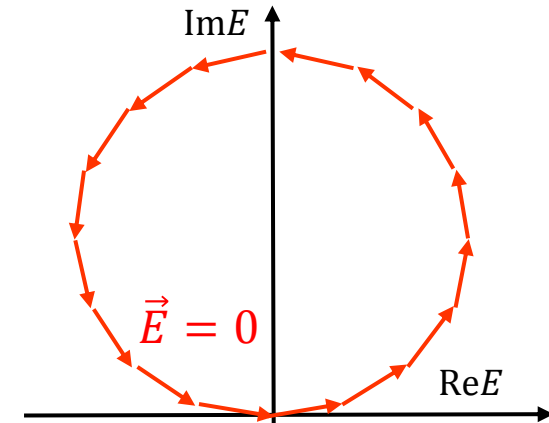
Aby policzyć pole pochodzące od M wąskich stref korzystamy z formuły Sommerfelda, w której całkę przybliżamy dyskretną sumą

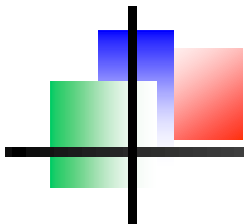
$$\begin{aligned} E(0,0,z) &= \frac{1}{i\lambda} \iint E(x,y,0) \frac{z}{r_{01}} \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} dx dy \\ &\cong \frac{1}{i\lambda z} \sum_{l=1}^M E_0 \frac{\pi \lambda z}{N} e^{ikr_l} = \frac{\pi E_0}{iN} \sum_{l=1}^M e^{i \frac{l\pi}{N}} \end{aligned}$$

$M = N = 8$



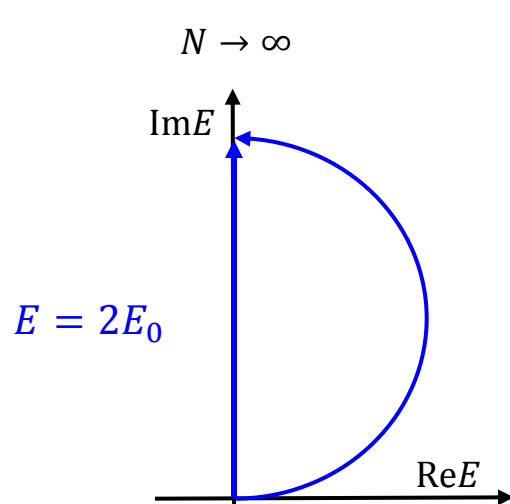
$M = 16, N = 8$





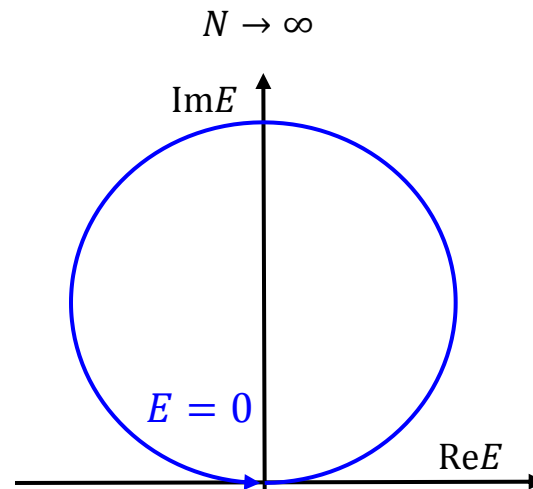
metoda obrazkowa – otw. kołowy, 3

$$E(0,0,z) \cong \frac{\pi E_0}{iN} \sum_{l=1}^M e^{i \frac{l\pi}{N}}$$



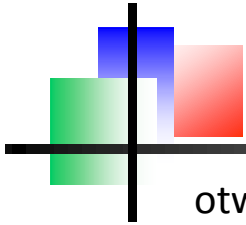
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^N e^{i \frac{l\pi}{N}} = \frac{2N}{\pi}$$

$$E(0,0,z) \cong 2E_0$$



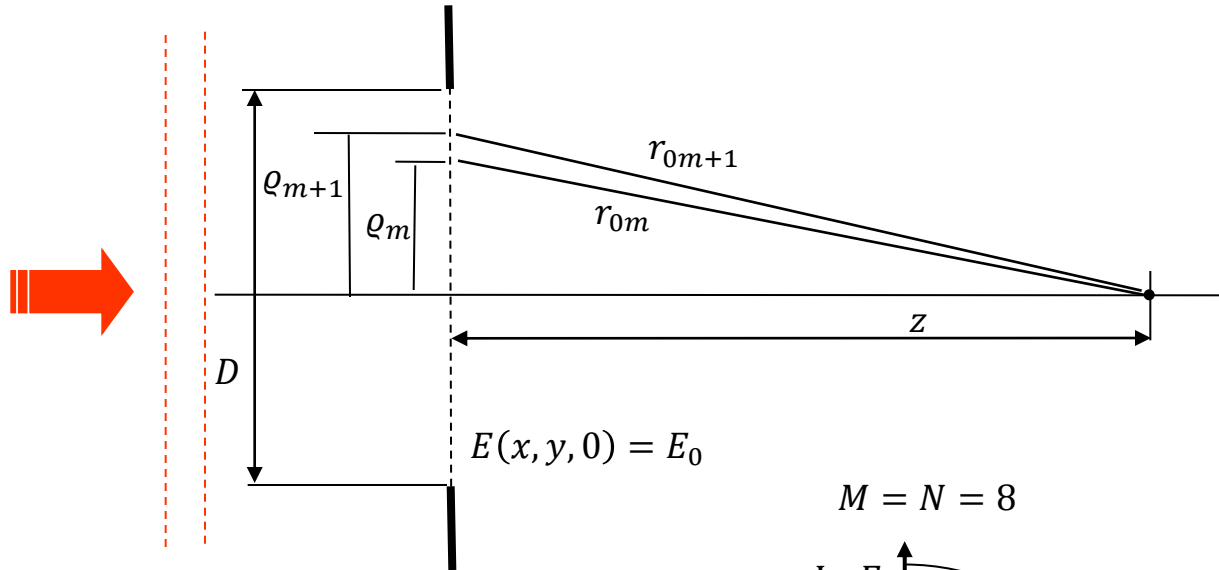
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{2N} e^{i \frac{l\pi}{N}} = \frac{2N}{\pi}$$

$$E(0,0,z) \cong 0$$



metoda obrazkowa – otw. kołowy, 4

otwór kołowy, pole na osi, jeszcze dokładniej

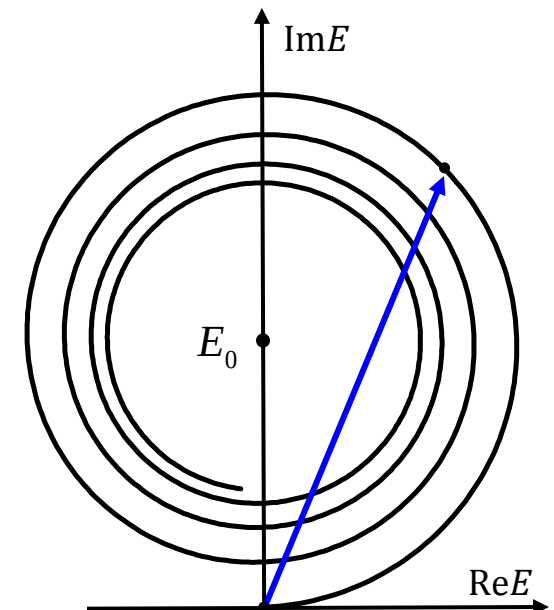
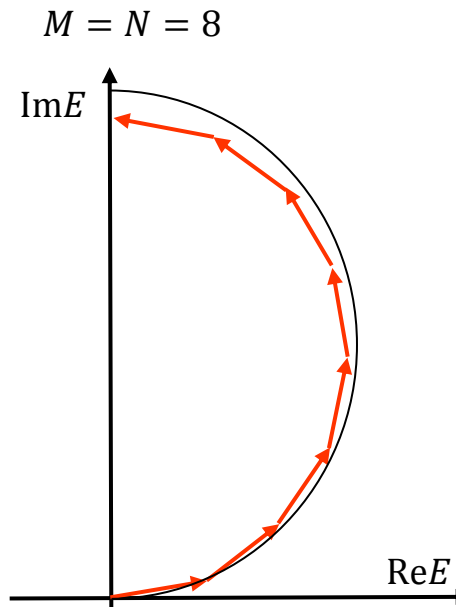


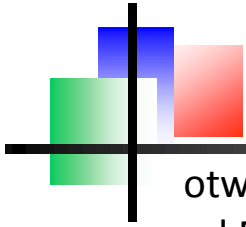
$$\pi Q_{m,l+1}^2 - \pi Q_{m,l}^2 = \frac{\pi \lambda z}{N}$$

$$E(0,0,z) \cong \frac{\pi E_0}{iN} \sum_{l=1}^M e^{i \frac{l\pi}{N}}$$

lepsze przybliżenie uwzględniające $\cos \Theta_0$ z całki Fresnela-Kirchoffa

$$E(0,0,z) \cong \frac{\pi E_0}{iN} \sum_{l=1}^M \frac{z}{r_l} e^{i \frac{l\pi}{N}}$$





metoda obrazkowa – otw. kołowy, 5

otwór kołowy, pole na osi -
od Fraunhoffera do Fresnela

Formuła Sommerfelda

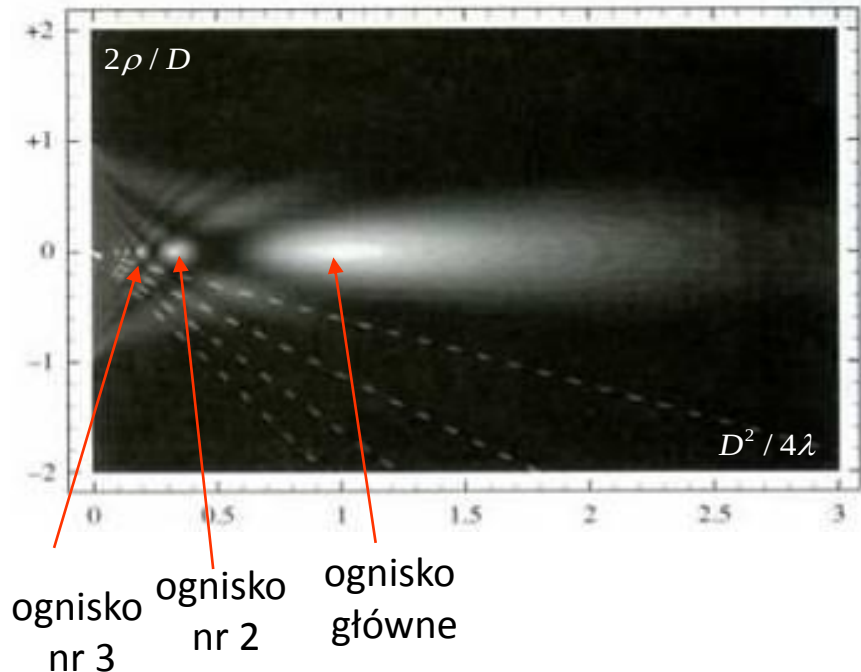
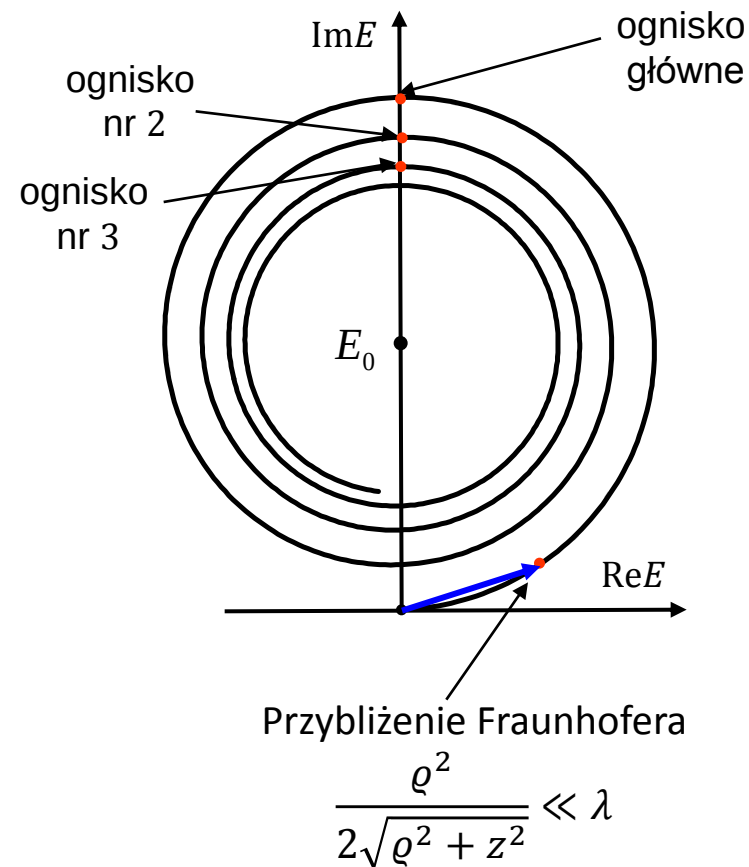
$$E(x_0, y_0, z) = \frac{1}{i\lambda} \iint_A E(x, y, 0) \frac{z}{r_{01}} \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} dx dy$$

$$E(0,0,z) = \frac{2\pi z}{i\lambda} E_0 \int_0^{D/2} \frac{\varrho}{z^2 + \varrho^2} e^{ik\sqrt{z^2 + \varrho^2}} d\varrho$$

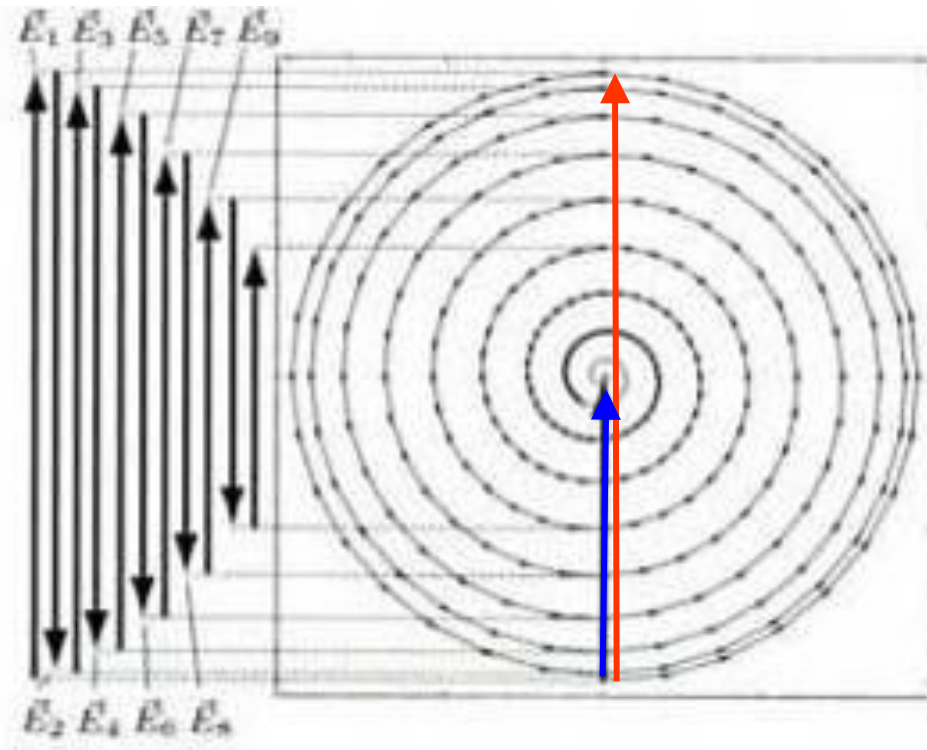
Nowa zmienna $l = \varrho^2$:

Kiedy $\varrho \ll z$ mamy $dl = 2\varrho d\varrho$ co daje

$$E(0,0,z) = \frac{\pi z}{i\lambda} E_0 \int_0^{D^2/4} \frac{1}{z^2 + l} e^{ik\sqrt{z^2 + l}} dl$$

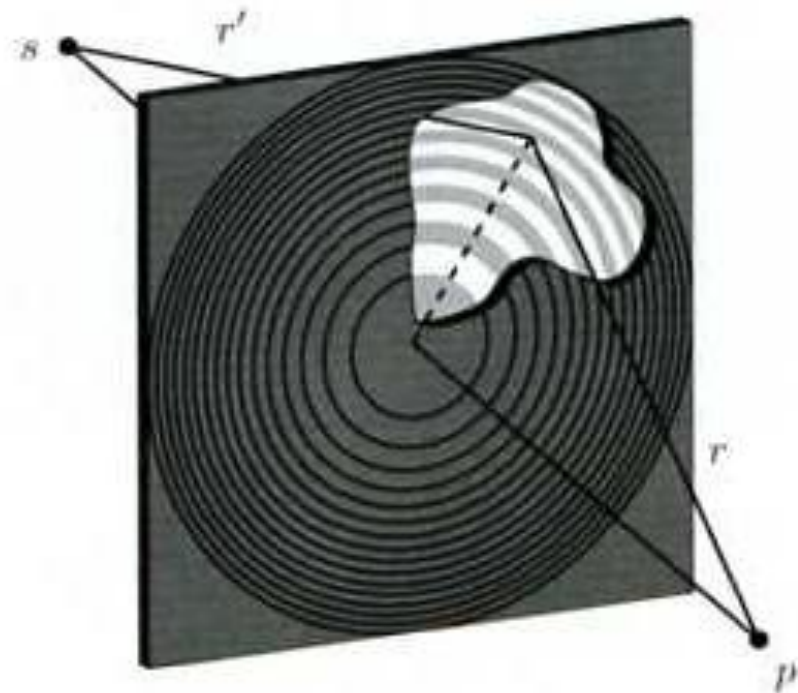


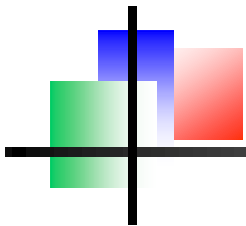
metoda obrazkowa - uwagi



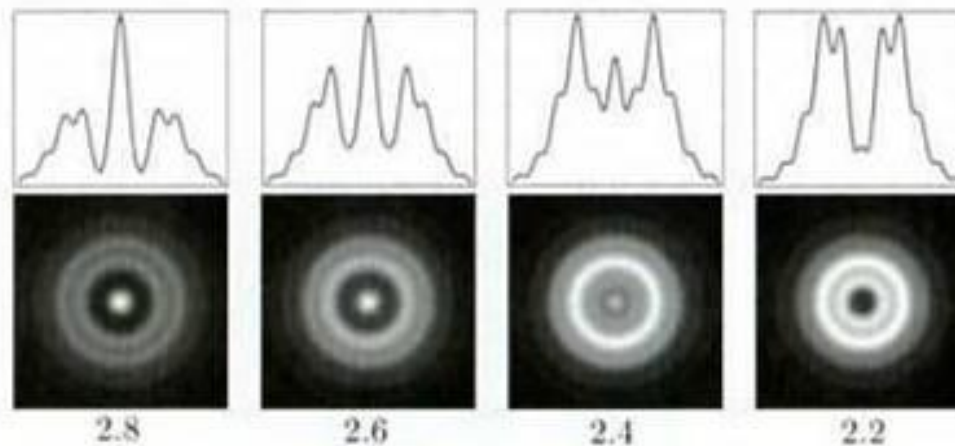
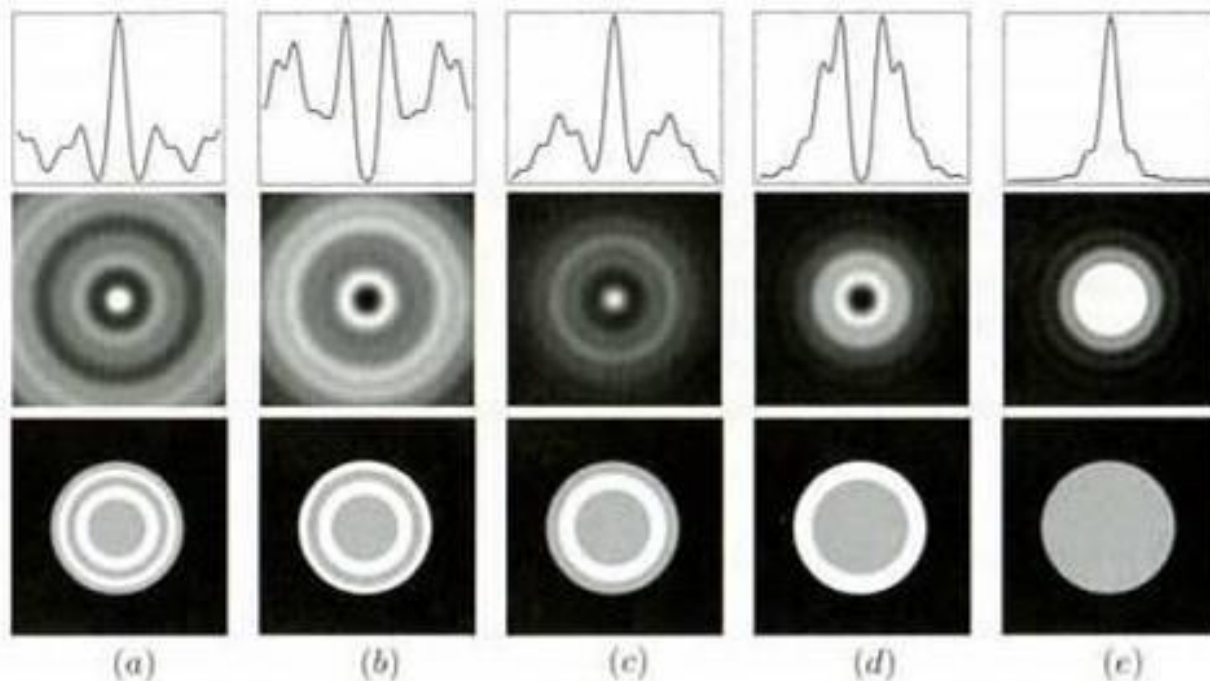
$$E_1 = 2E_0$$
$$I_1 = 4I_0$$

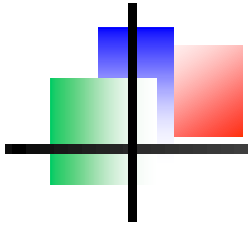
nieregularny kształt przestrzeni –
trudniejsze rachunki



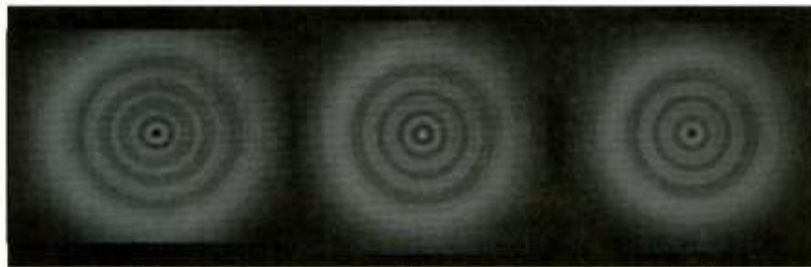


dyfrakcja Fresnela na otw. kołowym, 1





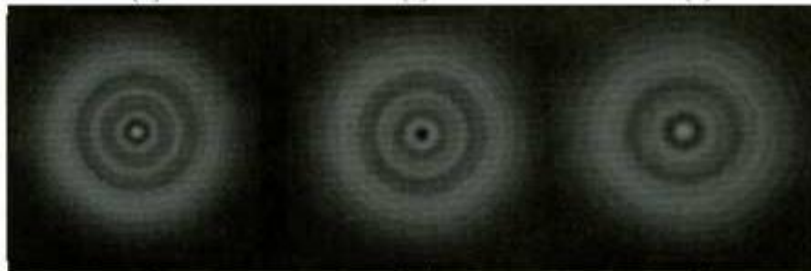
dyfrakcja Fresnela na otw. kołowym, 2



(a)

(b)

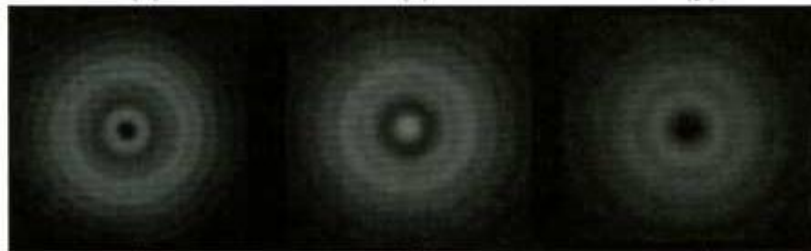
(c)



(d)

(e)

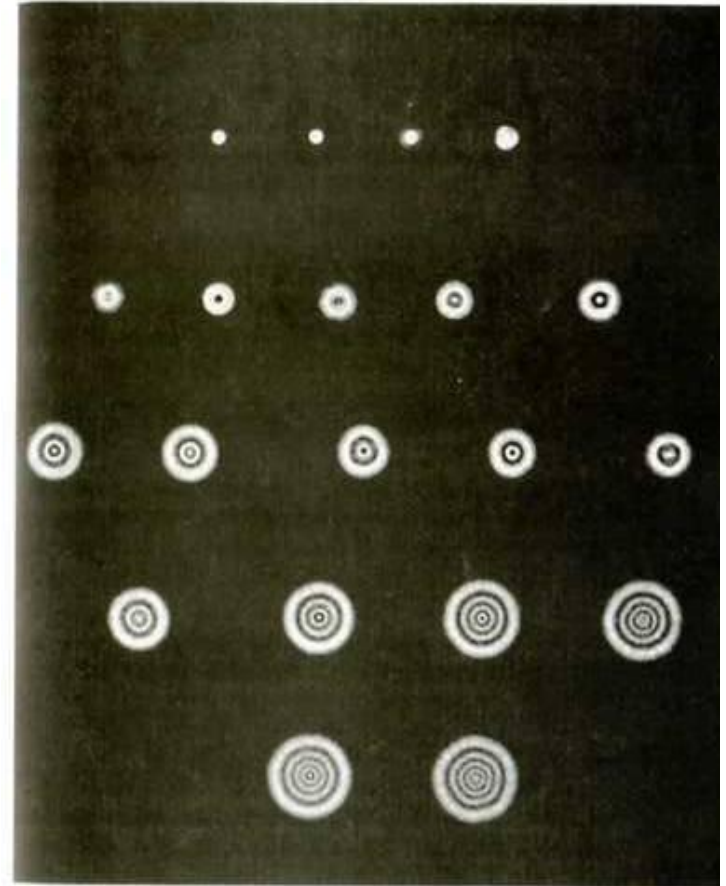
(f)



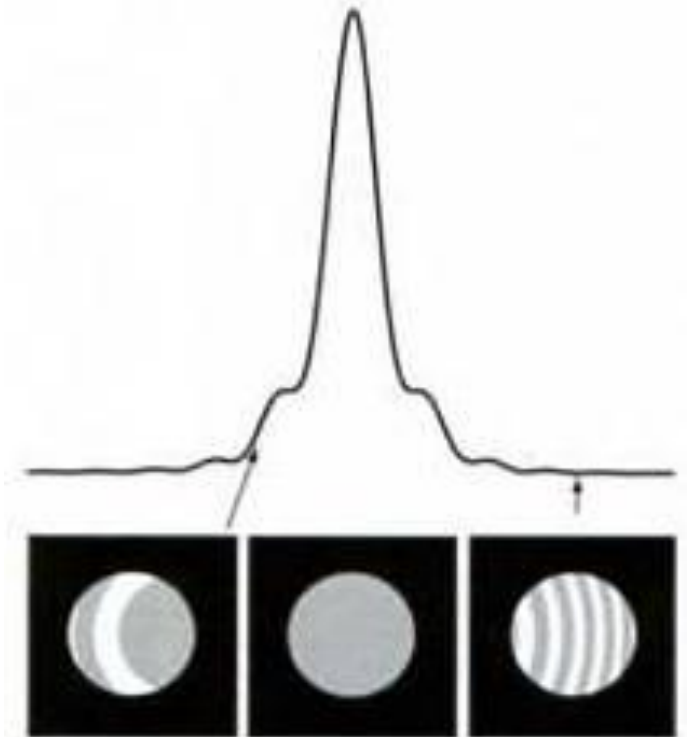
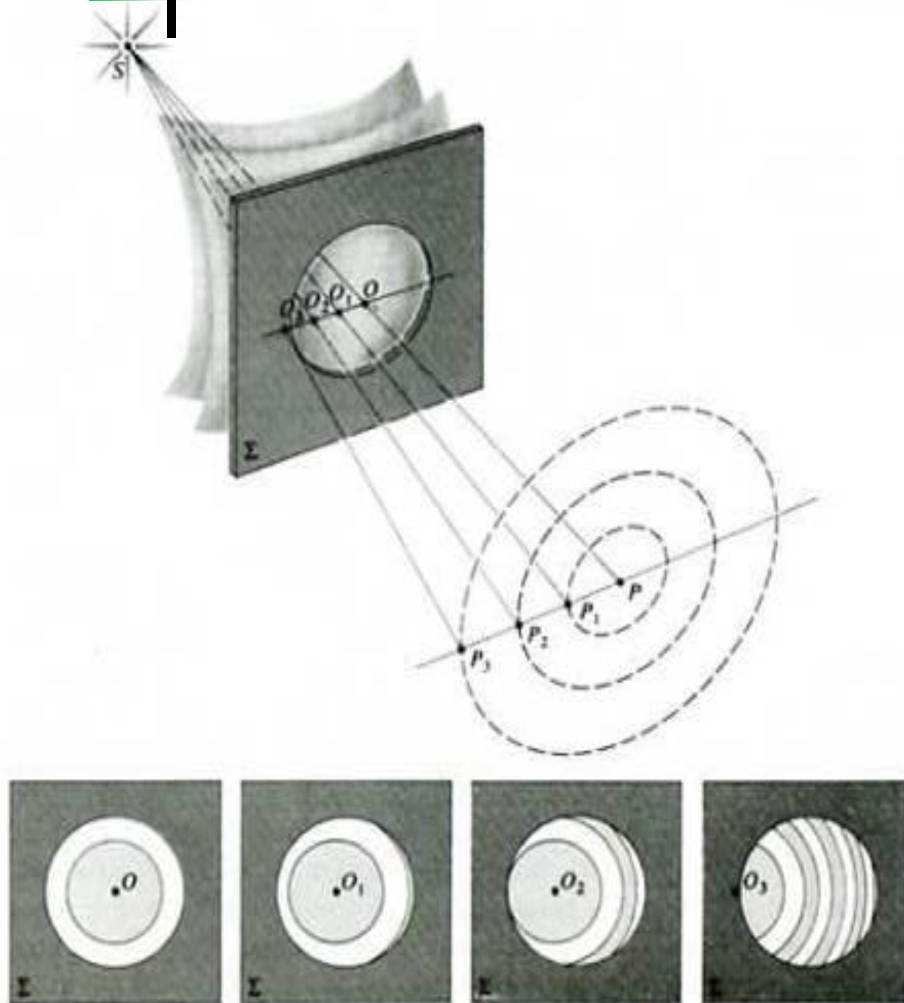
(g)

(h)

(i)

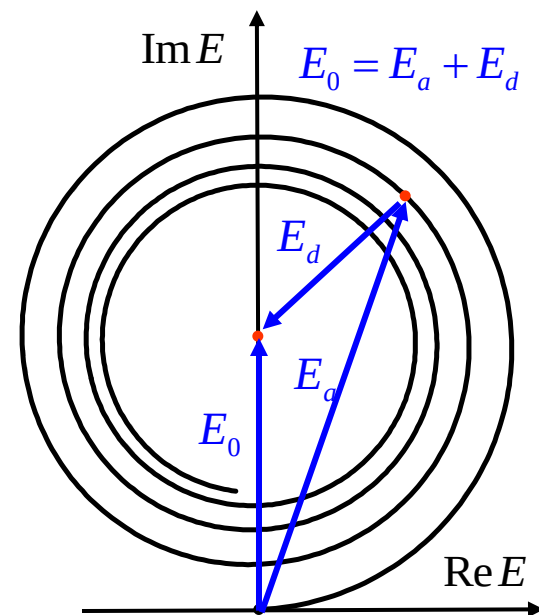
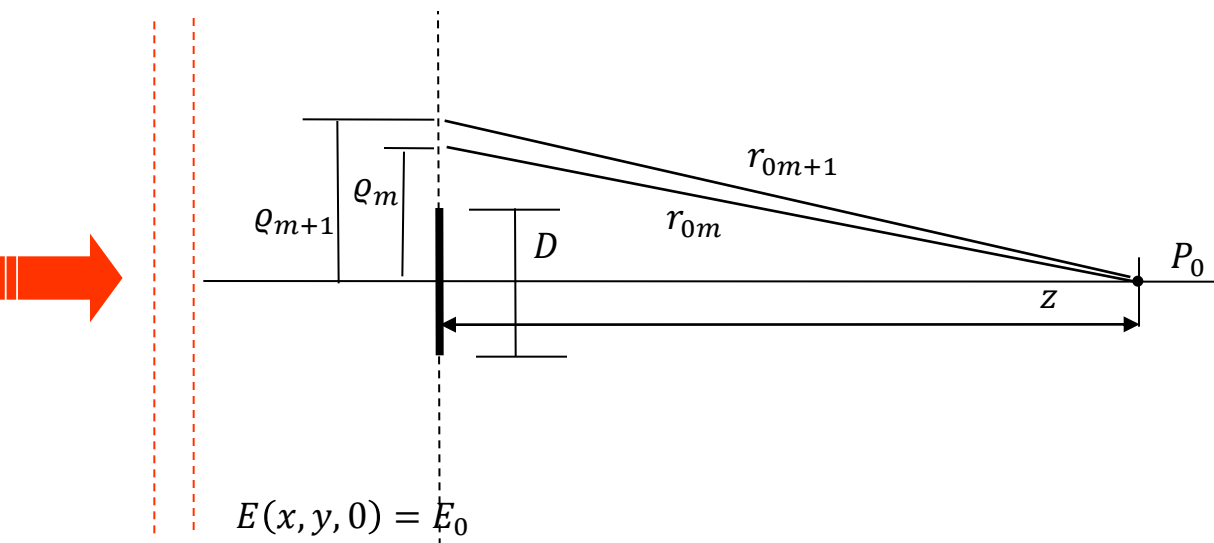


dyfrakcja Fresnela na otw. kołowym, 3



Dyfrakcja na dysku

okrągła przeszkoda, obserwacja na osi



Wiemy, że

$$E(0,0,z) = \frac{2\pi z}{i\lambda} E_0 \int_0^\infty \frac{q}{z^2 + q^2} e^{ik\sqrt{z^2+q^2}} dq = E_0$$

plamka Arago

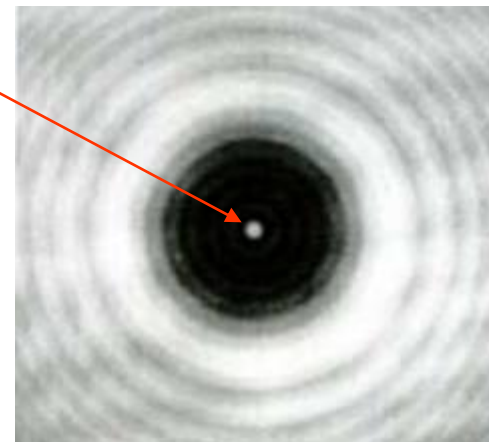
Zasada Babinet'a:

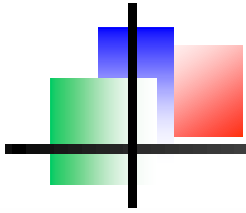
$$\int_0^\infty \frac{q}{z^2+q^2} e^{ik\sqrt{z^2+q^2}} dq = \int_0^{D/2} \frac{q}{z^2+q^2} e^{ik\sqrt{z^2+q^2}} dq + \int_{D/2}^\infty \frac{q}{z^2+q^2} e^{ik\sqrt{z^2+q^2}} dq$$

↑
pole bez przesł. E_0

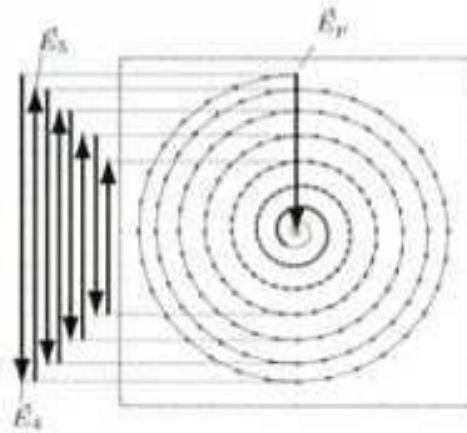
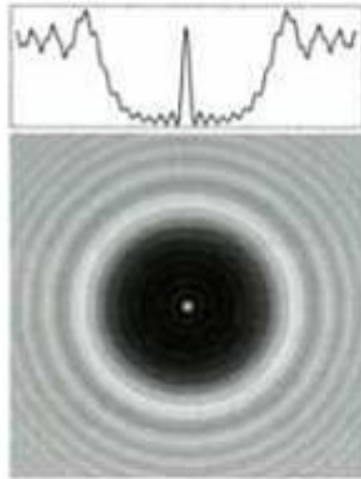
↑
pole od apertury
Kołowej E_a

↑
pole od dysku E_d



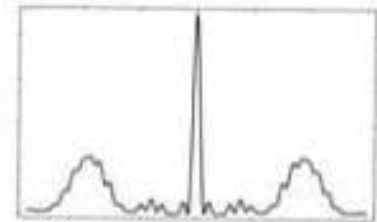
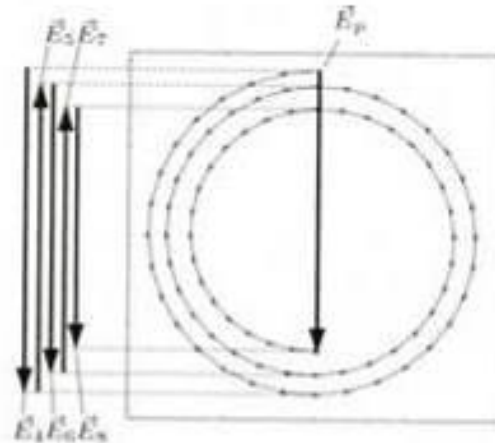


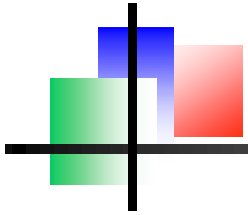
Dyfrakcja na dysku i pierścieniu



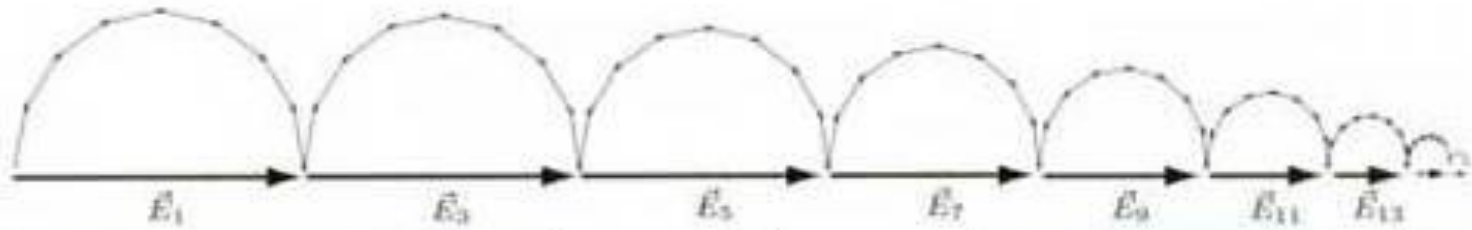
zasłonięte 3 pierwsze strefy Fresnela

odsłonięte strefy 4-8





Płytką strefowa Fresnela raz jeszcze



(a)



(b)

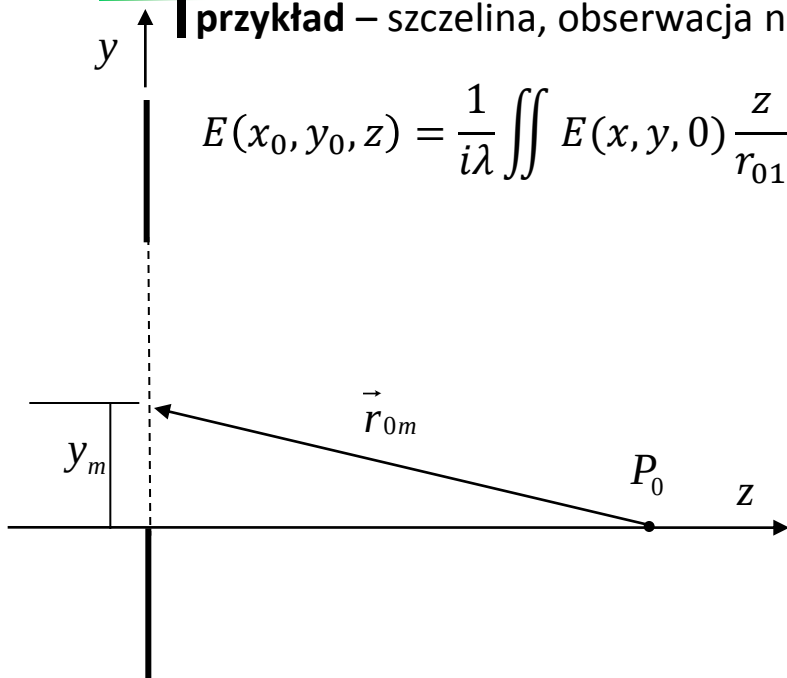


(c)

metoda obrazkowa - szczelina

przykład – szczelina, obserwacja na krawędzi

$$E(x_0, y_0, z) = \frac{1}{i\lambda} \iint E(x, y, 0) \frac{z}{r_{01}} \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} dx dy$$



dzielimy szczelinę na strefy Fresnela

$$y_m = \sqrt{m\lambda z}$$

$$r_{0m} = \sqrt{y_m^2 + z^2}$$

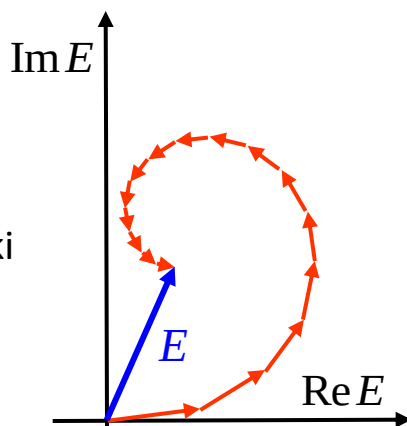
o powierzchni malejącej z indeksem m

$$\delta y_m = y_{m+1} - y_m = \frac{y_{m+1}^2 - y_m^2}{y_{m+1} + y_m} = \frac{\sqrt{\lambda z}}{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}}$$

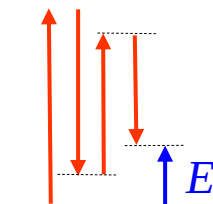
Możemy wypisać sumę składowych pola ale nie umiemy jej policzyć

$$E = \sum_{l=1}^{l_{\max}} (-1)^{l+1} \delta y_l$$

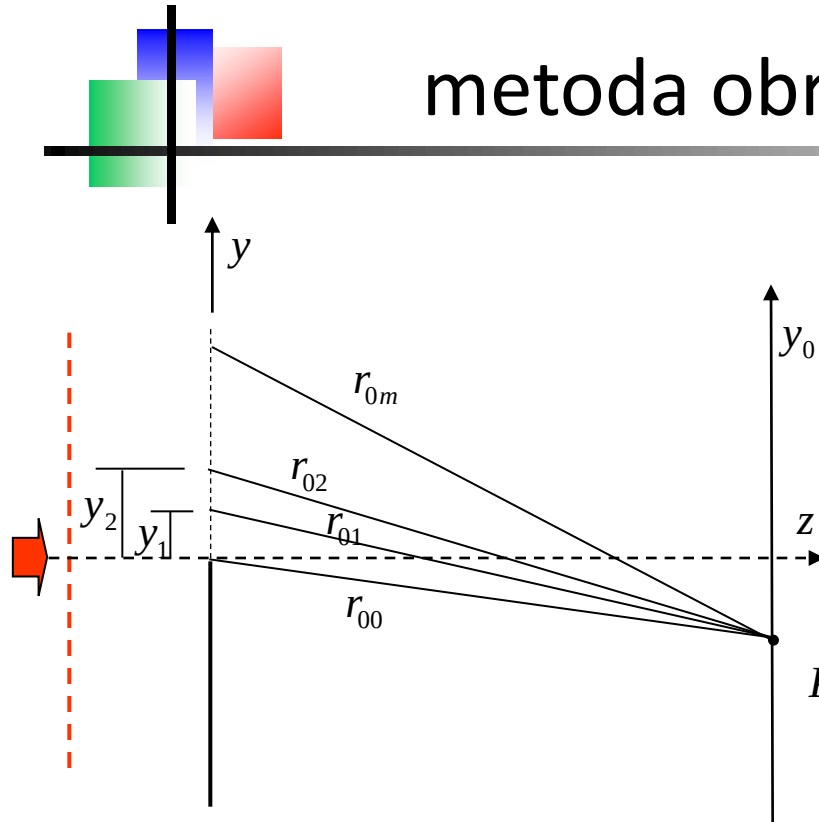
podział na wąskie paski



$l = 4$



metoda obrazkowa - półpłaszczyzna

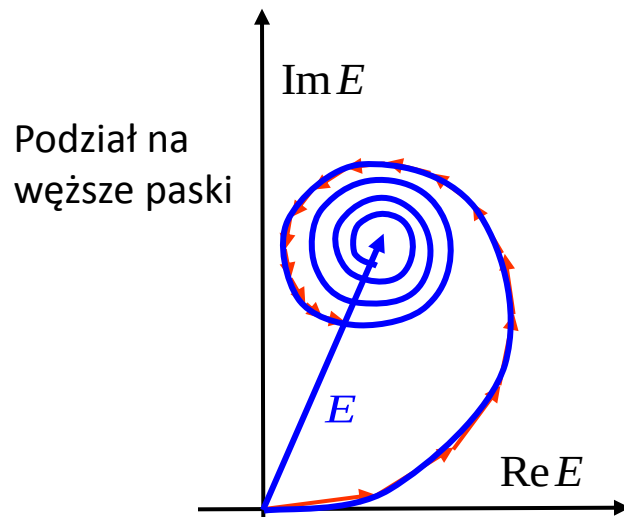


odkrytą półpłaszczyznę dzielimy na strefy Fresnela

$$\begin{aligned} r_{0m} - r_{00} &= m \frac{\lambda}{2} \\ r_{00} &= \sqrt{y_0^2 + z^2} \\ r_{0m} &= \sqrt{(y_m - y_0)^2 + z^2} \\ y_m &= \sqrt{y_0^2 + m\lambda z} - y_0 \end{aligned}$$

Dla $y_0 = 0$ szerokość strefy to

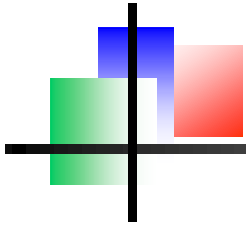
$$\delta y_m = \frac{\sqrt{\lambda z}}{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}}$$



Natężenie dla $y_0 = 0$ liczymy z zasady Babinet'a:

$$E = E_0/2 \text{ co daje } I = I_0/4$$

$$E(x_0, y_0, z) = \sum_{l=1}^{\infty} E_l$$



Przybliżenie Fresnela – ukł. kartezj., 1

Formuła Sommerfelda

$$E(x_0, y_0, z) = \frac{1}{i\lambda} \int_A E(x, y, 0) \frac{z}{r_{01}} \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} dx dy$$

Krok 1: $E(x_0, y_0, z) = \frac{1}{i\lambda z} \int_A E(x, y, 0) e^{ikr_{01}} dx dy$

Krok 2: rozwijamy pierwiastek kwadr. w szer. Taylora:

$$r_{01} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{z^2}}$$

$$\cong z + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2z} - \frac{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^2}{8z^3}$$

Jeśli

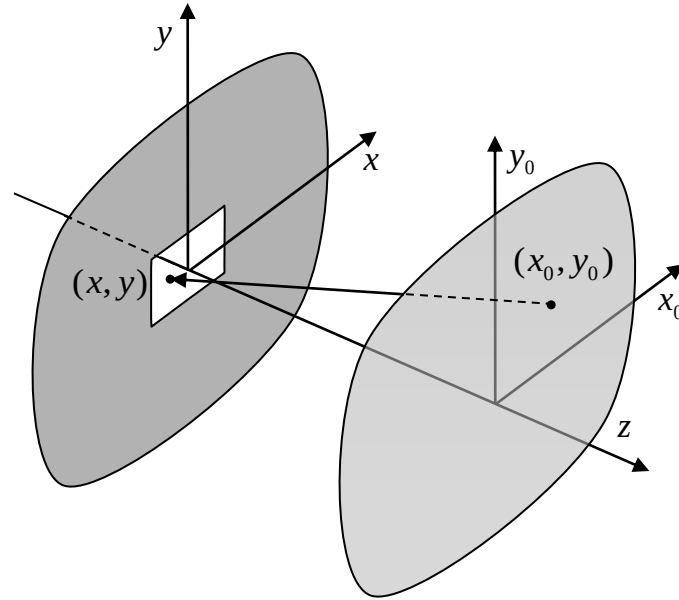
$$[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^2 \ll 8z^3 \lambda$$

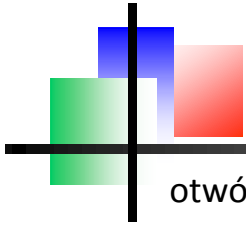
to

$$r_{01} \cong z + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2z}$$

i

$$E(x_0, y_0, z) = \frac{1}{i\lambda z} \iint_A E(x, y, 0) e^{i\frac{k}{2z}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]} dx dy$$

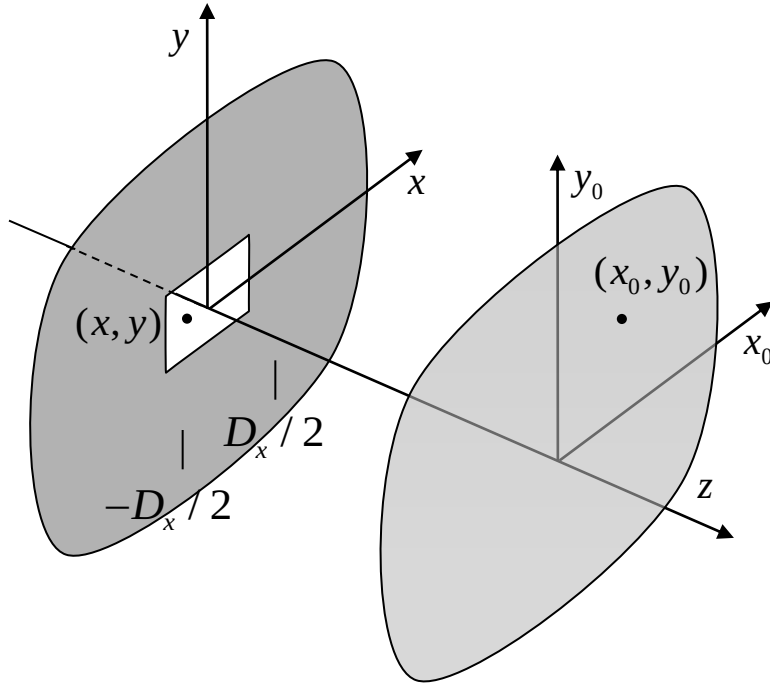




Przybliżenie Fresnela – ukł. kartezj., 2

otwór prostokątny

$$E(x, y, 0) = E_0 \text{rect}\left(\frac{x}{D_x}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{D_y}\right)$$



$$E(x_0, y_0, z) = \frac{1}{i\lambda z} \iint_A E(x, y, 0) e^{i\frac{k}{2z}[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]} dx dy$$

Założmy stałą amplitudę na otworze $E(x, y, 0) = E_0$

Podwójna całka da się sprowadzić do iloczynu dwóch całek: jedna po x a druga po y

oznaczamy

$$U_x = \frac{1}{\sqrt{\lambda z}} \int_{-D_x/2}^{D_x/2} e^{i\frac{k(x-x_0)^2}{2z}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x_b}^{x_e} e^{i\frac{\pi v^2}{2}} dv$$

$$\text{gdzie } v = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(x - x_0), \quad x_b = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\left(\frac{D_x}{2} - x_0\right), \quad x_e = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\left(\frac{D_x}{2} + x_0\right)$$

$$\text{Mamy wtedy: } U_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{x_e} e^{i\frac{\pi v^2}{2}} dv - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{x_b} e^{i\frac{\pi v^2}{2}} dv$$

Korzystamy a tożsamości Eulera $e^{i\eta} = \cos \eta + i \sin \eta$

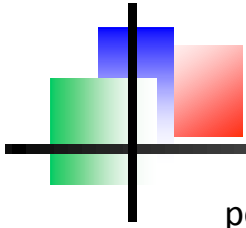
żeby wprowadzić całki z funkcji rzeczywistych (całki Fresnela)

$$C(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{\pi v^2}{2}\right) dv$$

$$S(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{\pi v^2}{2}\right) dv$$

i zapisać

$$U_x = \frac{1}{\sqrt{2}} [(C(x_e) - C(x_b)) + i(S(x_e) - S(x_b))]$$



Przybliżenie Fresnela – ukł. kartezj., 3

podobnie

$$U_y = \frac{1}{\sqrt{\lambda z}} \int_{-D_y/2}^{D_y/2} e^{i \frac{k(y-y_0)^2}{2z}} dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x_b}^{x_e} e^{i \frac{\pi v^2}{2}} dv$$

$$\text{gdzie } v = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}} (y - y_0), \quad y_b = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}} \left(\frac{D_y}{2} - y \right), \quad y_e = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}} \left(\frac{y}{2} + y \right)$$

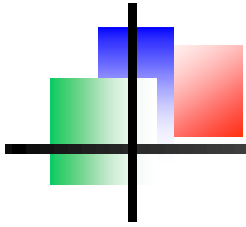
$$U_y = \frac{1}{\sqrt{2}} [(C(y_e) - C(y_b)) + i(S(y_e) - S(y_b))]$$

ostatecznie, pole

$$\begin{aligned} E(x_0, y_0, z) &= \frac{E_0 e^{ikz}}{i} U_x U_y = \\ &= \frac{E_0 e^{ikz}}{2i} [(C(x_e) - C(x_b)) + i(S(x_e) - S(x_b))][(C(y_e) - C(y_b)) + i(S(y_e) - S(y_b))] \end{aligned}$$

a natężenie

$$E(x_0, y_0, z) = \frac{I_0}{4} [(C(x_e) - C(x_b)) + i(S(x_e) - S(x_b))]^2 [(C(y_e) - C(y_b)) + i(S(y_e) - S(y_b))]^2$$

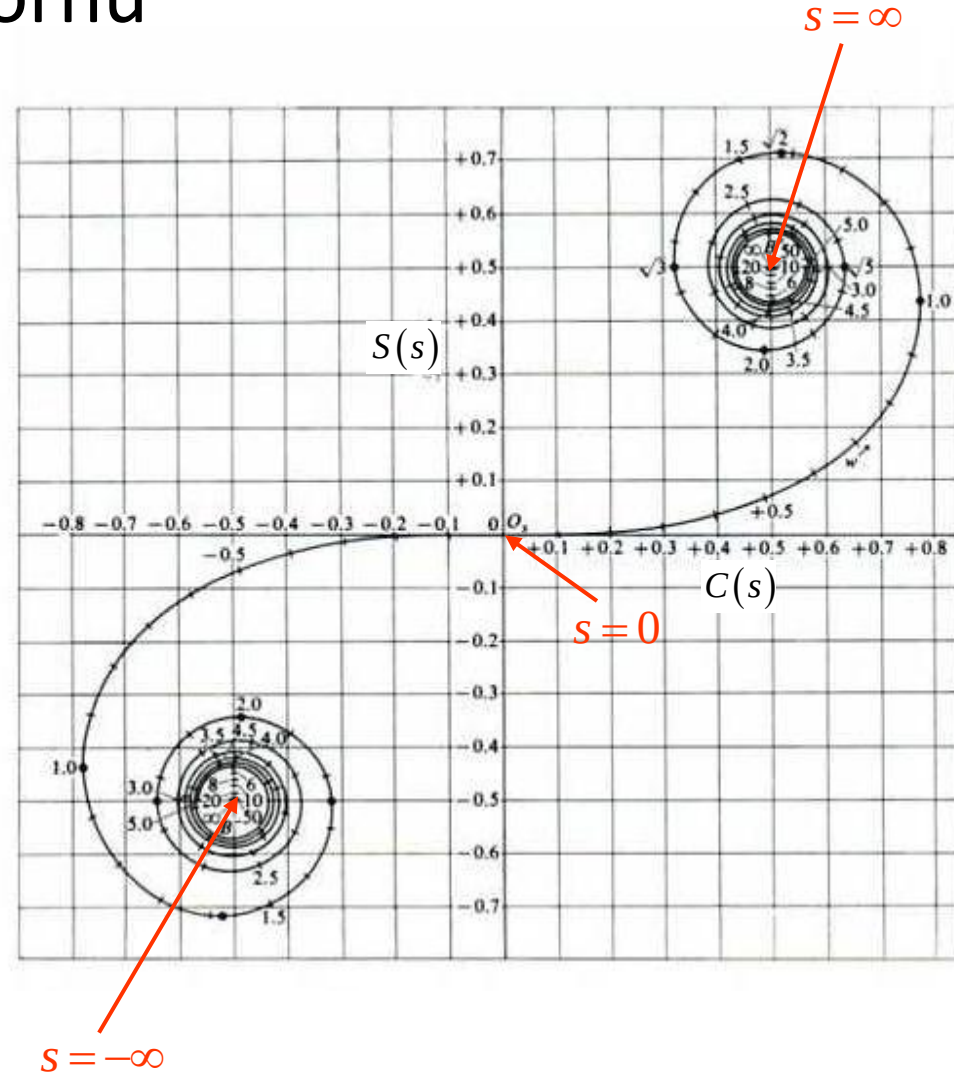
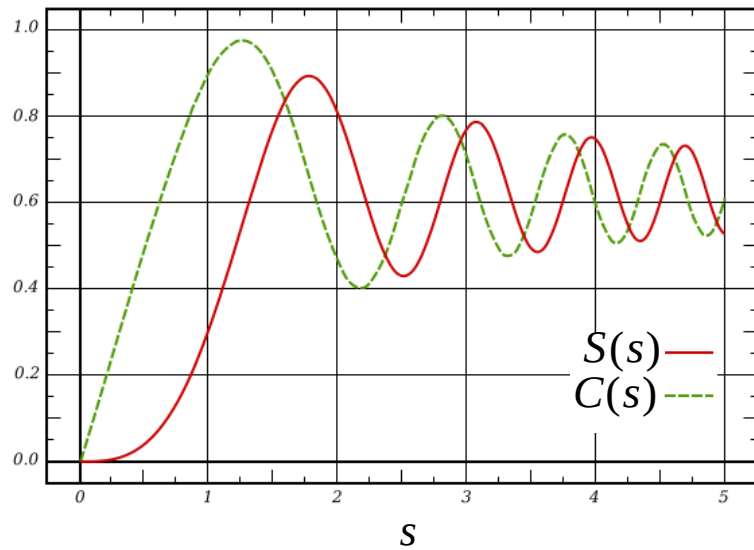


Spirala Cornu

Przypomnienie: całki Fresnela

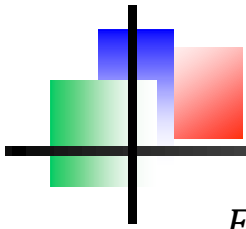
$$C(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{\pi v^2}{2}\right) dv$$

$$S(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{\pi v^2}{2}\right) dv$$



$$dl^2 = dC^2 + dS^2 = \left[\cos^2\left(\frac{\pi v^2}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi v^2}{2}\right) \right] ds^2 = ds^2$$

$$dl = ds$$



Dyfrakcja Fresnela – półpłaszczyzna, 1

$$E(x, y, 0) = E_0 \text{step}(y)$$

y

y

z

(x_0, y_0, z)

1

2

3

4

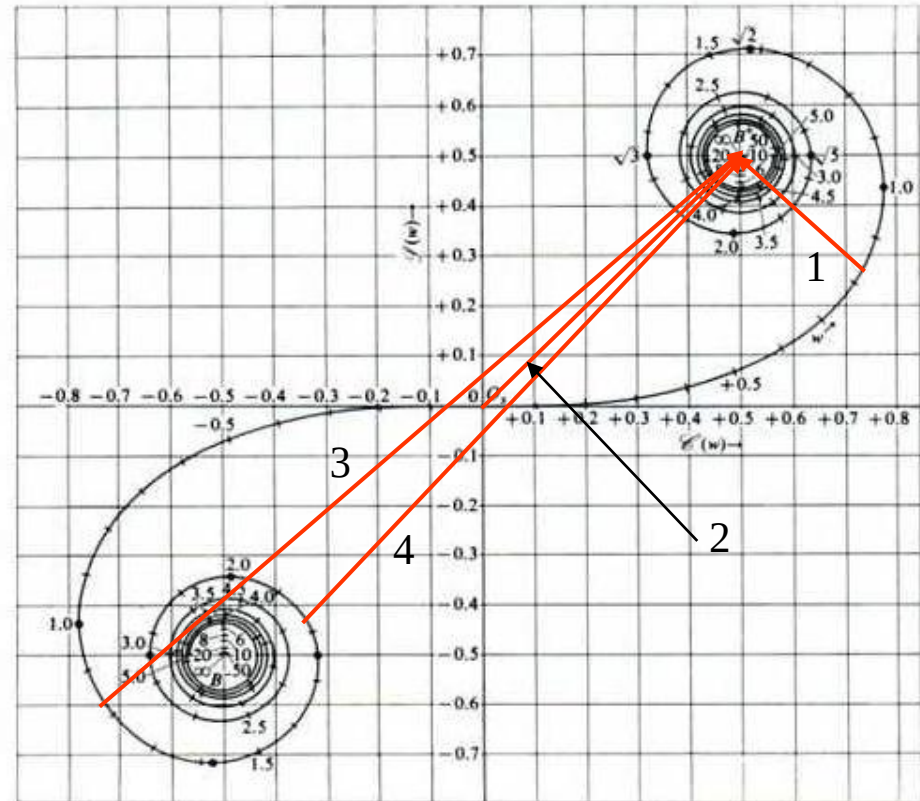
0

y_0

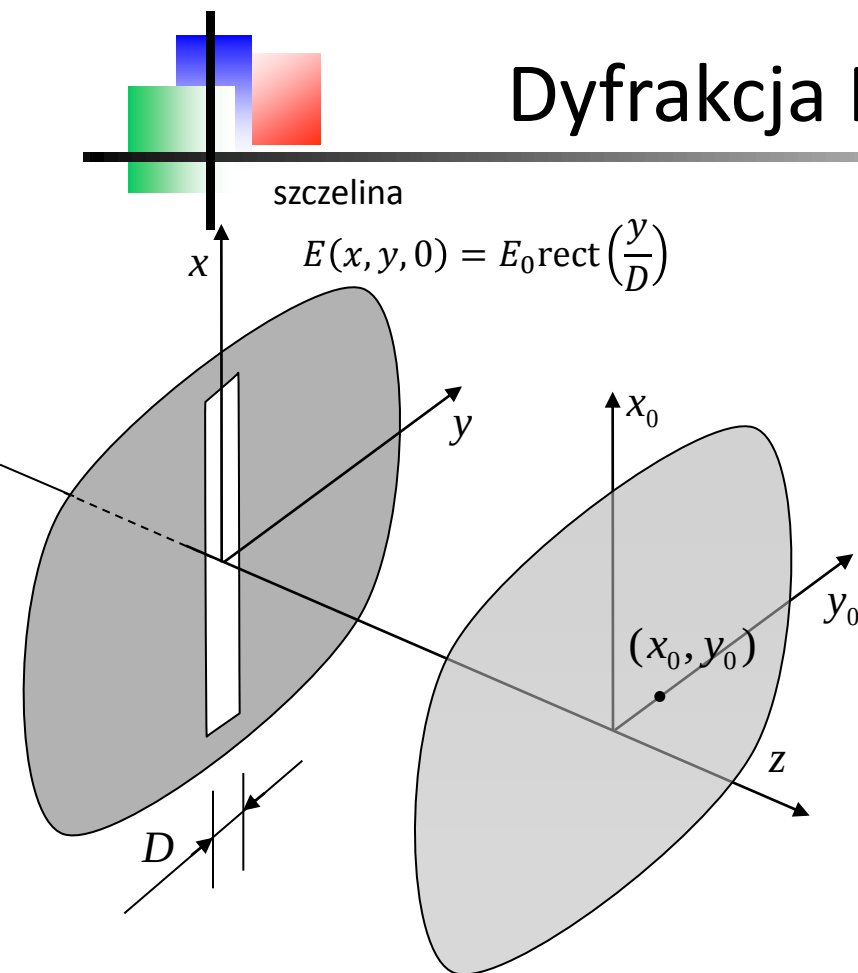


$$I(y_0, z) = \frac{I_0}{2} \{ [C(\infty) - C(y_b)]^2 + [S(\infty) - S(y_b)]^2 \}$$

$$y_b = -\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} y_0$$



Dyfrakcja Fresnela – szczelina, 1



$$I(y_0, z) = \frac{I_0}{2} \{ [C(y_e) - C(y_b)]^2 + [S(y_e) - S(y_b)]^2 \}$$

$$y_b = -\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} \left(\frac{D}{2} + y_0 \right), y_e = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}} \left(\frac{D}{2} - y_0 \right)$$

Przypomnienie

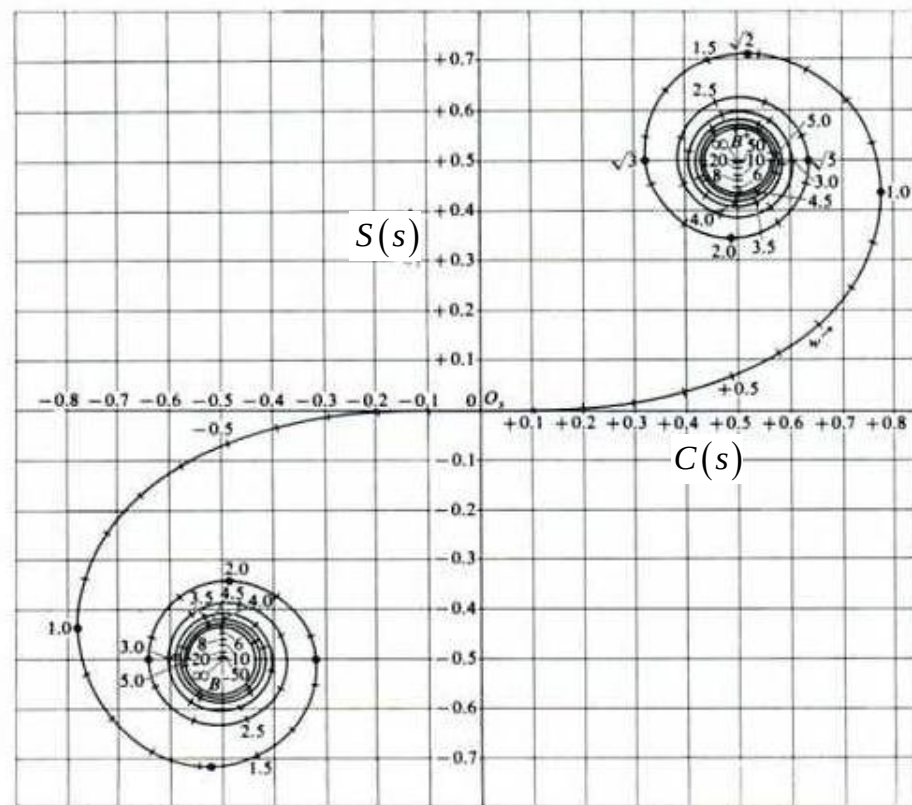
$$dl = ds$$

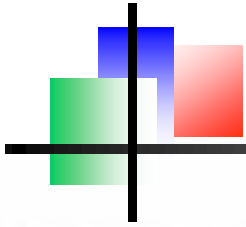
długość „sznurka”

$$y_e - y_b = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}} D$$

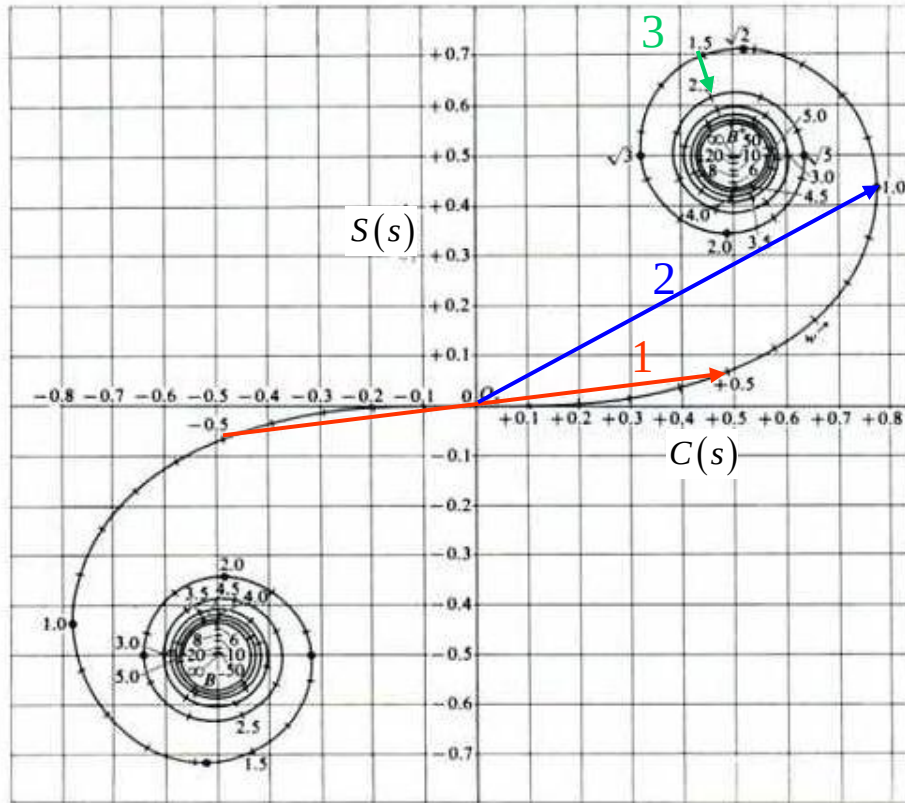
początek „sznurka”

$$y_b = -\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} \left(\frac{D}{2} + y_0 \right)$$





Dyfrakcja Fresnela – szczelina, 2



im szersza szczelina tym więcej oscylacji
amplituda oscylacji największa przy krawędziach

długość „sznurka” $y_e - y_b = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}} D$

początek „sznurka” $y_b = -\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} \left(\frac{D}{2} + y_0 \right)$

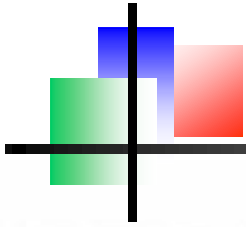
Rozważmy szczelinę o szerokości takiej, że

$$y_e - y_b = 1 \Leftrightarrow D = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}}$$

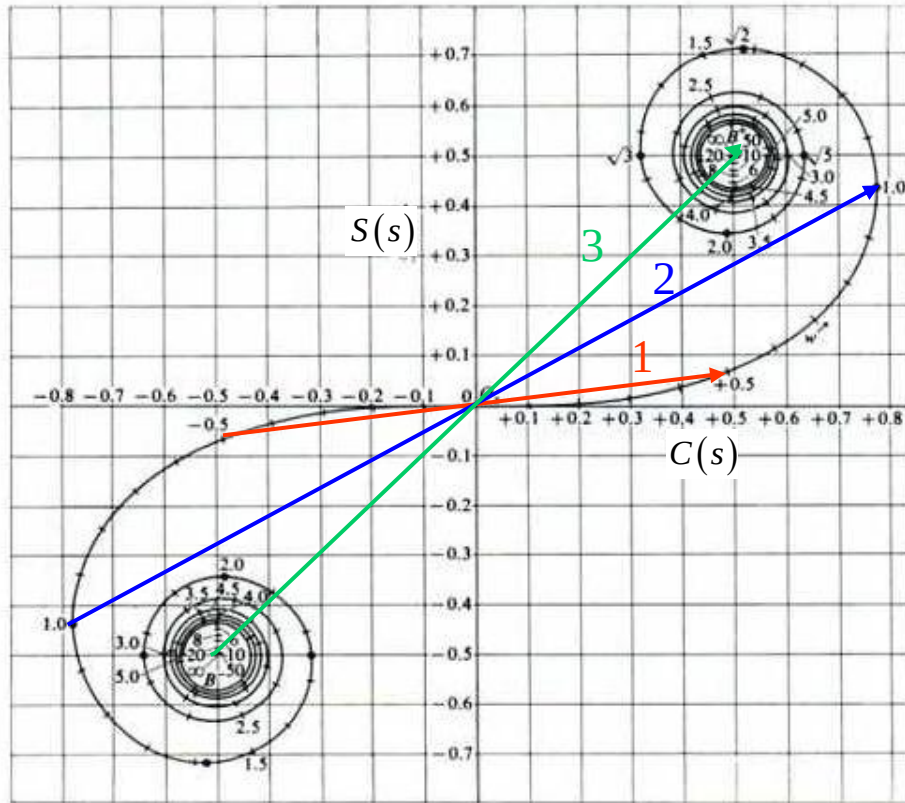
1. Środek szczeliny – „sznurek” ułożony symetrycznie (1)
2. Punkt obserwacji na granicy cienia geometrycznego (2)
3. Punkt obserwacji w cieniu geometrycznym (3) – pole maleje monotonicznie z odległością od szczeliny

Fraunhofer:

$$\frac{D^2}{\lambda z} \ll 1 \Rightarrow y_e - y_b = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}} D \ll 1$$



Dyfrakcja Fresnela – szczelina, 3



długość „sznurka” $y_e - y_b = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}} D$

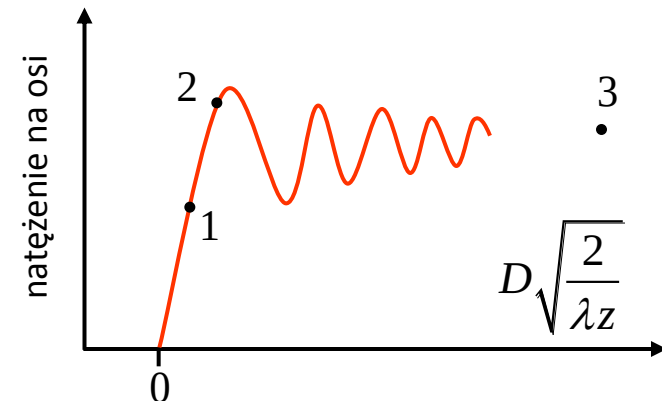
: $y_0 = 0$

Obserwacja na osi $y_0 = 0$; zmieniamy szerokość szczeliny

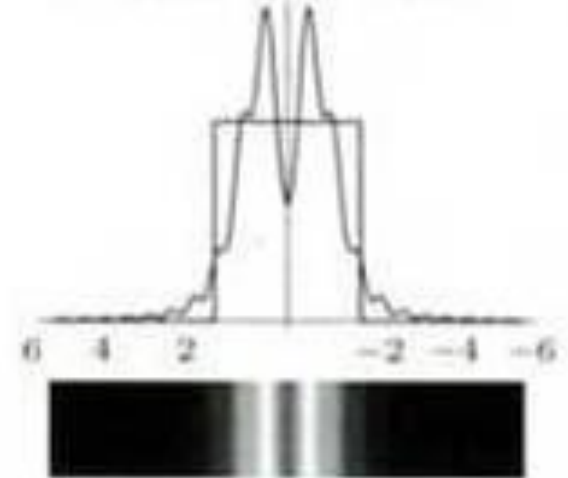
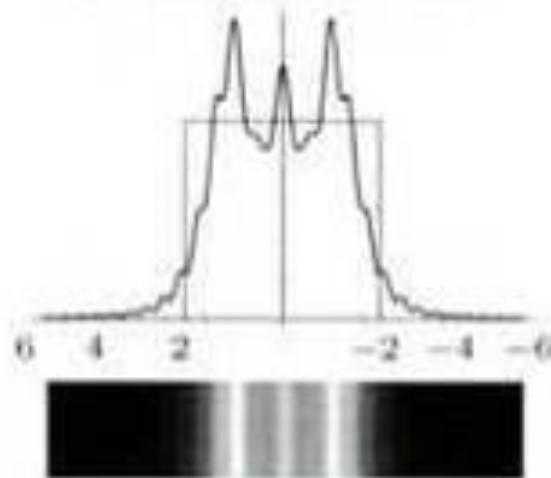
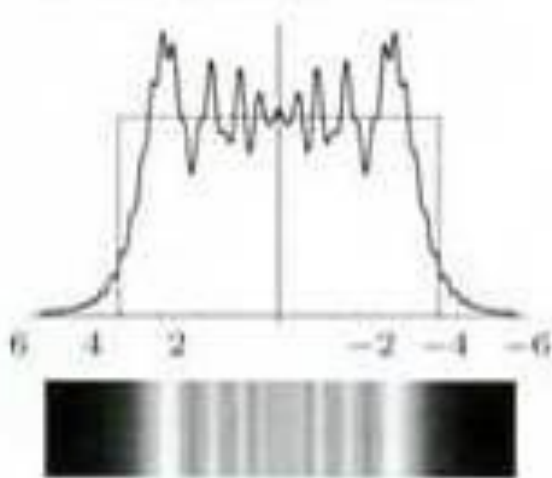
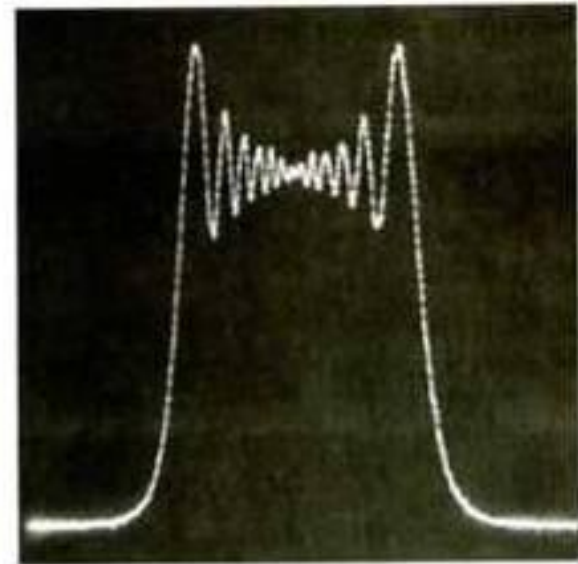
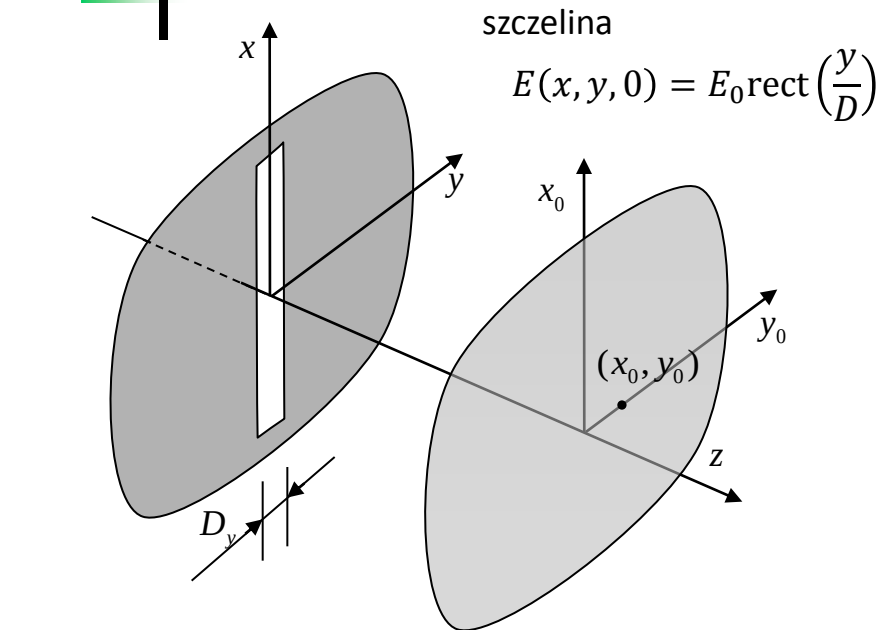
(1) $D = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}}$

(2) $D = \sqrt{2\lambda z}$

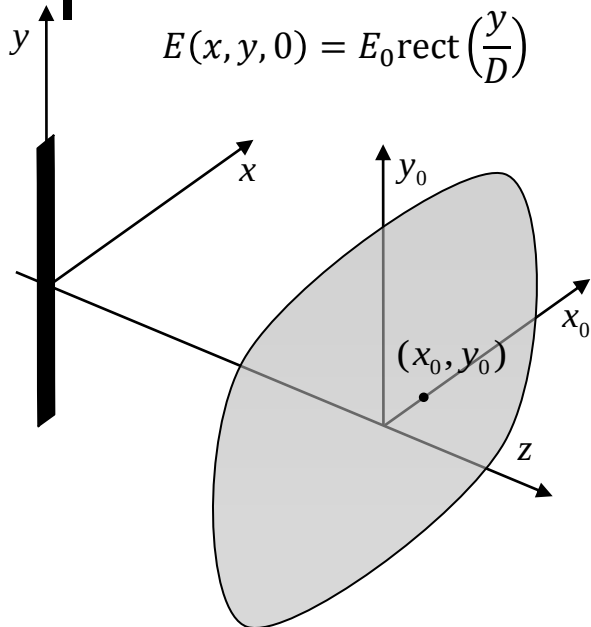
(3) $D = \infty$



Dyfrakcja Fresnela – szczelina, 4



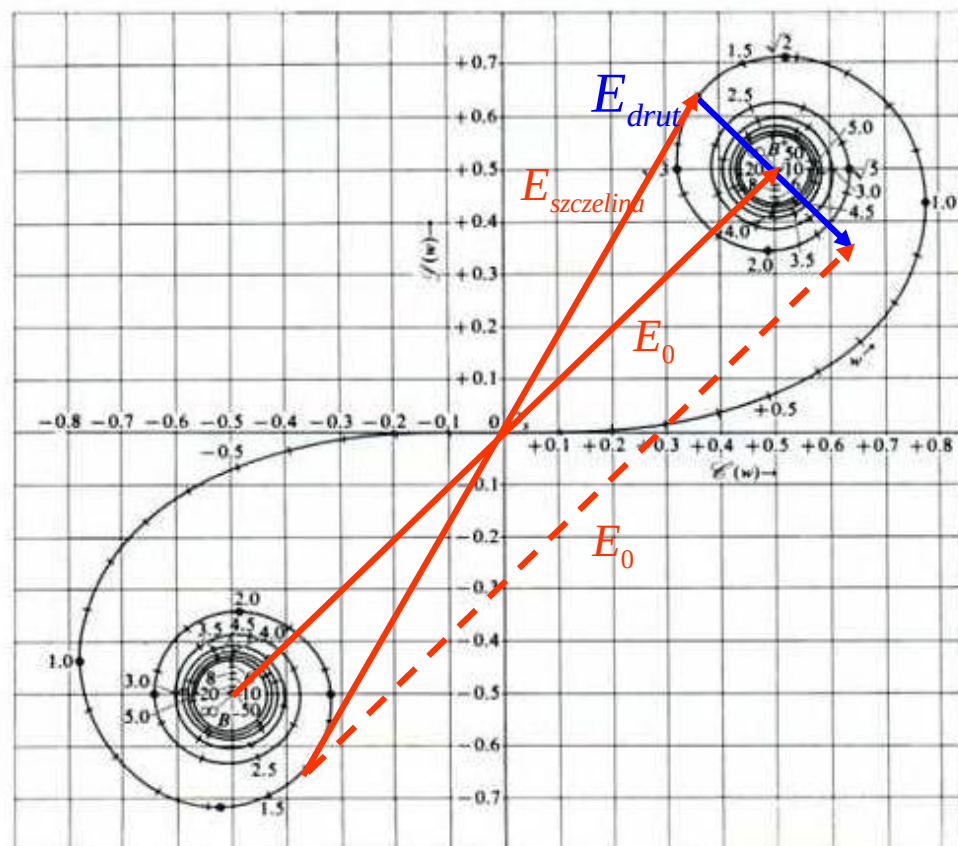
Dyfrakcja Fresnela - drut



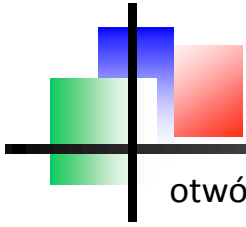
Babinet:

$$E_0 = E_{\text{drut}} + E_{\text{szczelina}}$$

$$E_{\text{drut}} = E_0 - E_{\text{szczelina}}$$



Jasny prążek na osi symetrii



Dyfrakcja Fresnela – otwór prostokątny

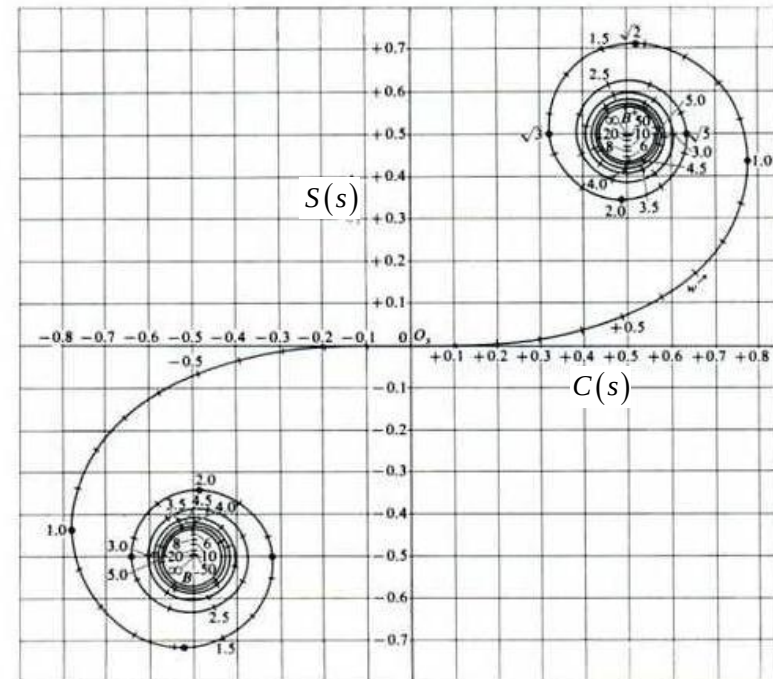
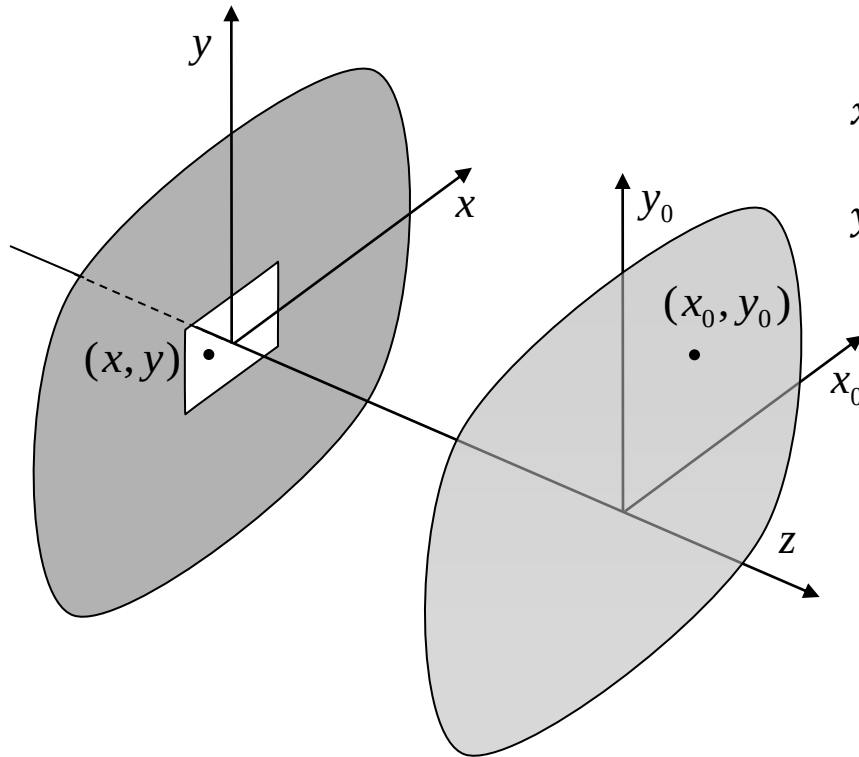
otwór prostokątny

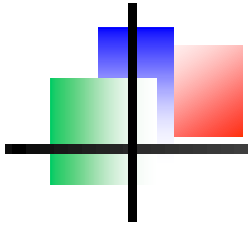
$$E(x, y, 0) = E_0 \text{rect}\left(\frac{x}{D_x}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{D_y}\right)$$

$$I(x_0, y_0, z) = \frac{I_0}{4} \{ [C(x_e) - C(x_b)]^2 + [S(x_e) - S(x_b)]^2 \} \\ \times \{ [C(y_e) - C(y_b)]^2 + [S(y_e) - S(y_b)]^2 \}$$

$$x_b = -\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} \left(\frac{D_x}{2} + x_0 \right), x_e = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}} \left(\frac{D_x}{2} - x_0 \right)$$

$$y_b = -\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} \left(\frac{D_y}{2} + y_0 \right), y_e = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}} \left(\frac{D_y}{2} - y_0 \right)$$





Dyfrakcja Fresnela – otwór prostokątny

