

Podstawy Fizyki IV

Optyka z elementami fizyki współczesnej

wykład 17, 20.04.2012

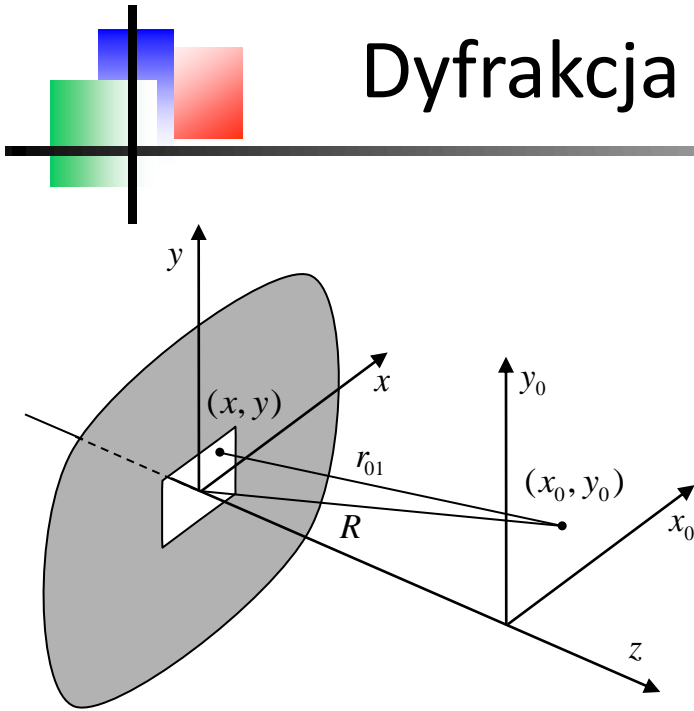
wykład:	Czesław Radzewicz
pokazy:	Radosław Chrapkiewicz, Filip Ozimek
ćwiczenia:	Ernest Grodner



Wykład 16 - przypomnienie

- dyfrakcja Fresnela – obrazek strefowy
- dyfrakcja Fresnela – obrazek sub-strefowy
- całki Fresnela i spirala Cornu

Dyfrakcja Fraunhofer = trans. Fouriera



dla obrazu Fraunhofera

$$E(x_0, y_0, z) = C \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y, 0) e^{ikr_{10}} dy$$

Ponieważ

$$r_{01} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2}$$

to definiując R jako

$$R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z^2}$$

mamy

$$\begin{aligned} r_{01} &= R \sqrt{1 + (x^2 + y^2)/R^2 - 2(xx_0 + yy_0)/R^2} \\ &\cong R \sqrt{1 - 2(xx_0 + yy_0)/R^2} \\ &\cong R - (xx_0 + yy_0)/R \end{aligned}$$

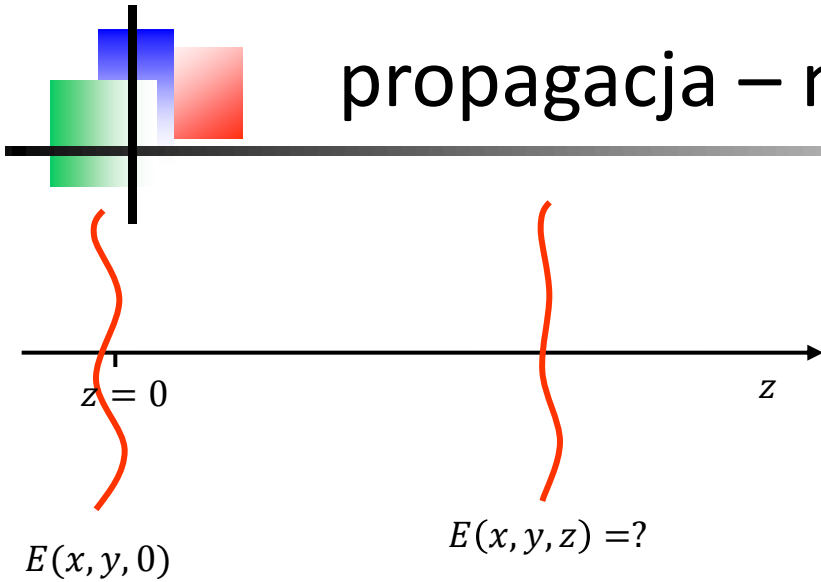
ostatecznie

$$\begin{aligned} E(x_0, y_0, z) &\cong C' e^{ikR} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y, 0) e^{-ik(xx_0 + yy_0)/R} dy \\ &= C' e^{ikR} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y, 0) e^{-i(k\frac{x_0}{R}x + k\frac{y_0}{R}y)} dy \\ &= C'' \mathcal{F}[E(x, y, 0)] \left(k\frac{x_0}{R}, k\frac{y_0}{R} \right) = \end{aligned}$$

dwuwymiarowa transformata
Fouriera

W dalekim polu obserwujemy
transformatę Fouriera pola

propagacja – metoda spektralna



Rozważając fale monochromatyczne pole w $z = 0$ zawsze możemy zapisać pole elektryczne fali o skończonych rozmiarach poprzecznych jako superpozycję fal płaskich

$$E(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \tilde{E}(k_x, k_y, 0) e^{i(k_x x + k_y y)}$$

przy czym, amplitudy fal płaskich liczymy z transformaty Fouriera pola w płaszczyźnie $z = 0$

$$\tilde{E}(k_x, k_y, 0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dx dy E(x, y, 0) e^{-i(k_x x + k_y y)}$$

Analogicznie

$$E(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \tilde{E}(k_x, k_y, z) e^{i(k_x x + k_y y)}$$

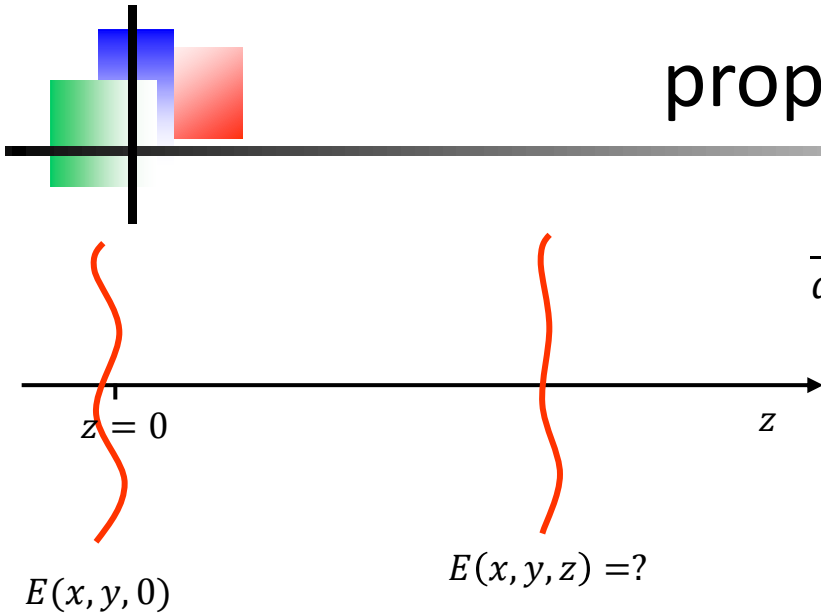
ze współczynnikami

$$\tilde{E}(k_x, k_y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dx dy E(x, y, z) e^{-i(k_x x + k_y y)}$$

Pole $E(x, y, z)$ musi spełniać r-nie Helmholtza $(\Delta + k^2)E(x, y, z) = 0$. Wstawiamy pole w postaci całki do tego r-nia

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \underbrace{\left[\frac{d^2}{dz^2} \tilde{E}(k_x, k_y, z) + (k^2 - k_x^2 - k_y^2) \tilde{E}(k_x, k_y, z) \right]}_{= 0} e^{i(k_x x + k_y y)} = 0$$

propagacja, 2



$$\frac{d^2}{dz^2} \tilde{E}(k_x, k_y, z) + (k^2 - k_x^2 - k_y^2) \tilde{E}(k_x, k_y, z) = 0$$



$$\tilde{E}(k_x, k_y, z) = \tilde{E}(k_x, k_y, 0) e^{-i\mu z}$$

$$\mu = \pm \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = k_z$$

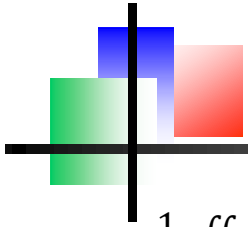
- $k^2 - k_x^2 - k_y^2 > 0$ $\tilde{E}(k_x, k_y, z) = \tilde{E}(k_x, k_y, 0) e^{ik_z z}$ fale propagujące się
- $k^2 - k_x^2 - k_y^2 < 0$ $\tilde{E}(k_x, k_y, 0) e^{-\mu z}$ fale zanikające
(ewanescentyjne)

Jeśli tylko $z \gg \lambda$ to

$$E(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{k_x^2 + k_y^2 \leq k^2} dk_x dk_y \tilde{E}(k_x, k_y, 0) e^{i(k_x x + k_y y)} e^{iz \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}}$$

Kompletny przepis -
bardzo szybkie
metody numeryczne

Propagacja - proste wnioski



Niezbyt bliskie pole (obraz Fresnela)

$$k_x^2 + k_y^2 \ll k^2 \rightarrow k_z \cong k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}$$



$$E(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} e^{ikz} \iint dk_x dk_y \tilde{E}(k_x, k_y, 0) e^{i(k_x x + k_y y)} e^{-iz \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}}$$

Oznaczmy: $f(k_x) = k_x x - \frac{k_x^2 z}{2k}$, $g(k_y) = k_y y - \frac{k_y^2 z}{2k}$

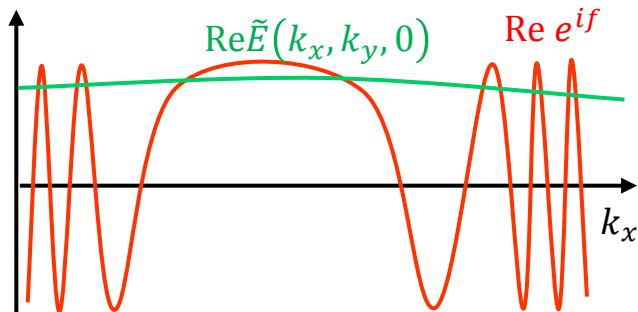
Mamy wtedy

$$E(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} e^{ikz} \iint dk_x dk_y \tilde{E}(k_x, k_y, 0) e^{if(k_x)} e^{ig(k_y)}$$

Jeśli funkcja $\tilde{E}(k_x, k_y, 0)$ jest wolnozmienna to wkład do całki pochodzi tylko z obszarów gdzie funkcje f i g mają zerowe pochodne bo wszędzie indziej exponensy tych funkcji oscylują bardzo szybko wokół zera.

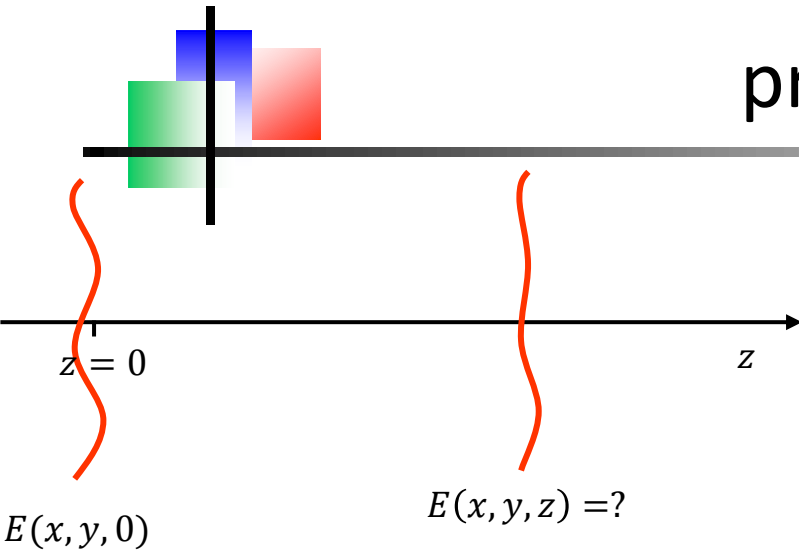
Zerowe pochodne funkcji f i g dają:

$$k_x = k \frac{x}{z}, k_y = k \frac{y}{z}$$



punkt stacjonarny fazy – zasada Fermata

propagacja, 3



Rozważamy tylko fale propagujące się ze skończonym rozkładem składowych poprzecznych wektora falowego skupionym wokół zera – wiązka rozchodzi się głównie w kierunku z – możemy wtedy całkować k_x i k_y od $-\infty$ do ∞

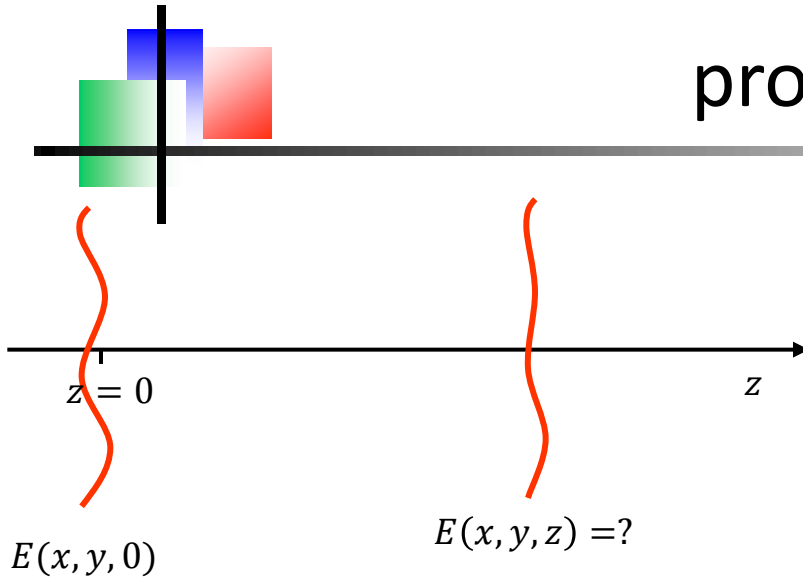
$$E(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \tilde{E}(k_x, k_y, 0) e^{i(k_x x + k_y y)} e^{iz \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}}$$

Do r-nia powyżej wstawiamy

$$\tilde{E}(k_x, k_y, 0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E(x', y', 0) e^{-i(k_x x' + k_y y')}$$

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y e^{i(k_x x + k_y y)} e^{iz \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E(x', y', 0) e^{-i(k_x x' + k_y y')} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E(x', y', 0) \underbrace{\iint_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y e^{i[k_x(x-x') + k_y(y-y')]}}_{h(x-x', y-y', z)} e^{iz \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E(x', y', 0) h(x-x', y-y', z) \end{aligned}$$

propagacja, 4



Propagacja jest przykładem zagadnienia liniowego w 2 wymiarach:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E(x', y', 0) h(x - x', y - y', z)$$

$h(x - x', y - y', z)$ to **odpowiedź impulsowa układu**

Dla źródła punktowego $E(x, y, 0) = \delta(x - x_p)\delta(y - y_p)$ (impulsu) mamy

$$E(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} h(x - x_p, y - y_p, z)$$

Matematycznie całka

$$E(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E(x', y', 0) h(x - x', y - y', z)$$

to splot funkcji $E(x', y', 0)$ oraz $h(x - x', y - y', z)$

$$E(x, y, z) = E(x, y, 0) * h(x - x', y - y', z)$$

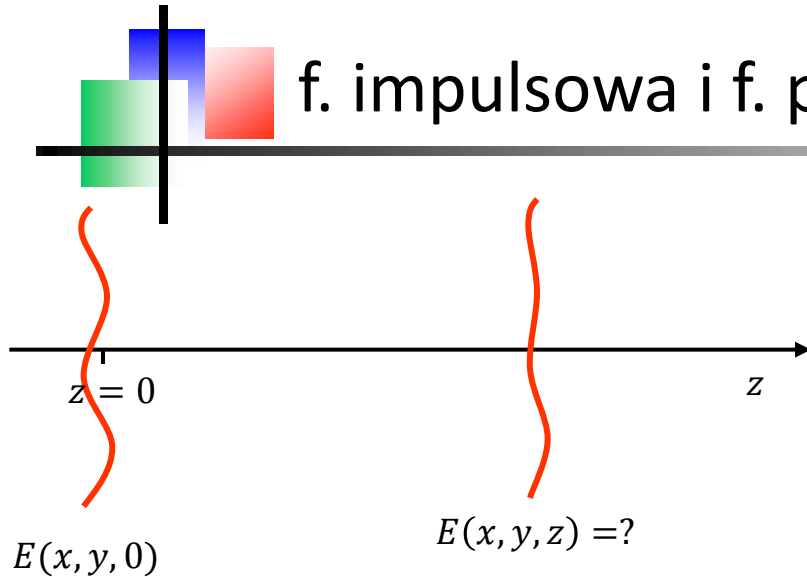
Wiadomo, że transformata Fouriera splotu to iloczyn transformat

$$\tilde{E}(k_x, k_y, z) = \tilde{E}(k_x, k_y, 0) \tilde{h}(k_x, k_y, z)$$

gdzie funkcja $\tilde{h}(k_x, k_y, z)$ nazywana (**amplitudową**) **funkcją przenoszenia** jest transformatą Fouriera funkcji odpowiedzi impulsowej

$$\tilde{h} = \mathcal{F}[h] = e^{i\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}z}$$

f. impulsowa i f. przenoszenia w przybliż. Fresnela



Jeśli rozważane pole jest małe rozbieżne: $k_x^2, k_y^2 \ll k^2$ to

$$\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \cong k - (k_x^2 + k_y^2)/2k$$

i funkcja przenoszenia ma postać

$$\tilde{h}(k_x, k_y, z) = e^{\left[ikz - i \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} z \right]}$$

Korzystamy z faktu, że funkcje h oraz \tilde{h} to para sprzężona fourierowsko aby policzyć funkcję odpowiedzi impulsowej. Rachunki...

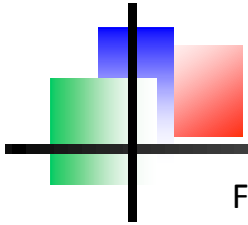
$$h(x, y, z) = \frac{i}{\lambda z} e^{ik\left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)}$$

Teraz możemy już wypisać pole $E(x, y, z)$ w obrazie Fresnela

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E(x', y', 0) h(x - x', y - y', z) \\ &= \frac{i}{\lambda z} e^{ikz} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E(x', y', 0) e^{\frac{ik}{2z} [(x-x')^2 + (y-y')^2]} \end{aligned}$$

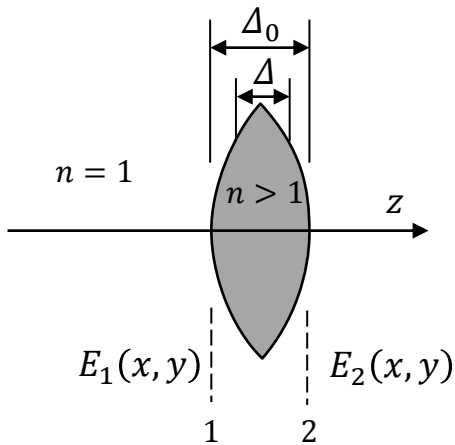
Wynik identyczny jak ten podany w wykładzie 16. i wyprowadzony z całki Sommerfelda

ogólny opis układów liniowych 2D np., układów obrazujących w języku odpowiedzi impulsowej oraz funkcji przenoszenia



funkcja przenoszenia cienkiej soczewki

Funkcję impulsową i funkcję przenoszenia możemy zdefiniować także dla układów optycznych. Przykład, cienka soczewka



Cienka oznacza tutaj, że promienie świetlne nie zmieniają odległości od osi przy przejściu przez soczewkę. Wtedy jedynym efektem działania soczewki jest zmiana fazy fali zależna od położenia czyli x oraz y : $\varphi(x, y)$

$$\varphi(x, y) = k\Delta_0 + (n - 1)k\Delta(x, y)$$

Rachunki zrobimy dla soczewki płasko-wypukłej

$$\Delta(x, y) = \Delta_0 - R + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

dla $x^2, y^2 \ll R^2$ mamy

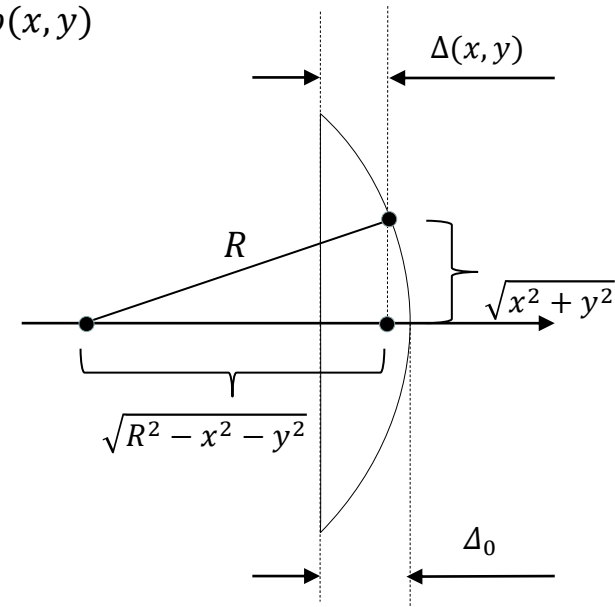
$$\Delta(x, y) \cong \Delta_0 - (x^2 + y^2)/2R$$

i

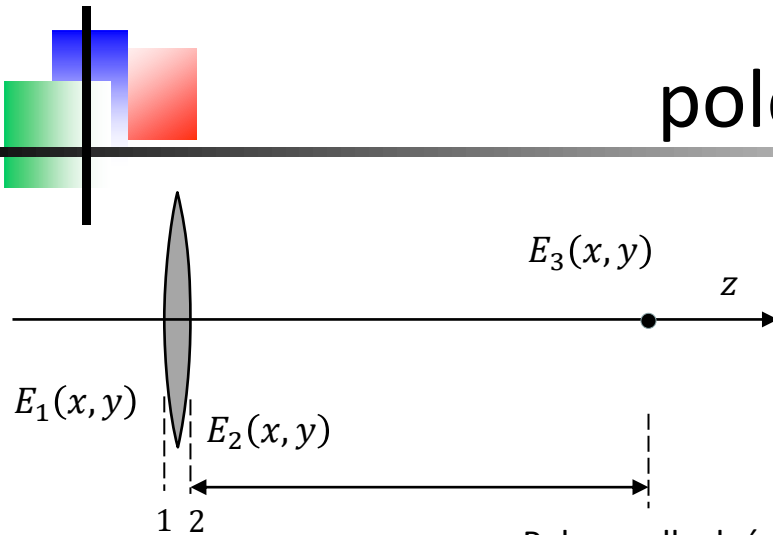
$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= -(n - 1)k(x^2 + y^2)/2R \\ &= -k(x^2 + y^2)/2f \end{aligned}$$

Wynik końcowy nie zależy od kształtu soczewki tak długo jak długo obowiązuje przybliżenie cienkiej soczewki

$$E_2(x, y) = E_1(x, y)e^{-ik(x^2+y^2)/2f}$$



pole za soczewką



Zakładamy cieką soczewkę, dla której
 $E_2(x, y) = E_1(x, y)e^{-ik(x^2+y^2)/2f}$

Pole w odległości z za soczewką liczymy w obrazie Fresnela

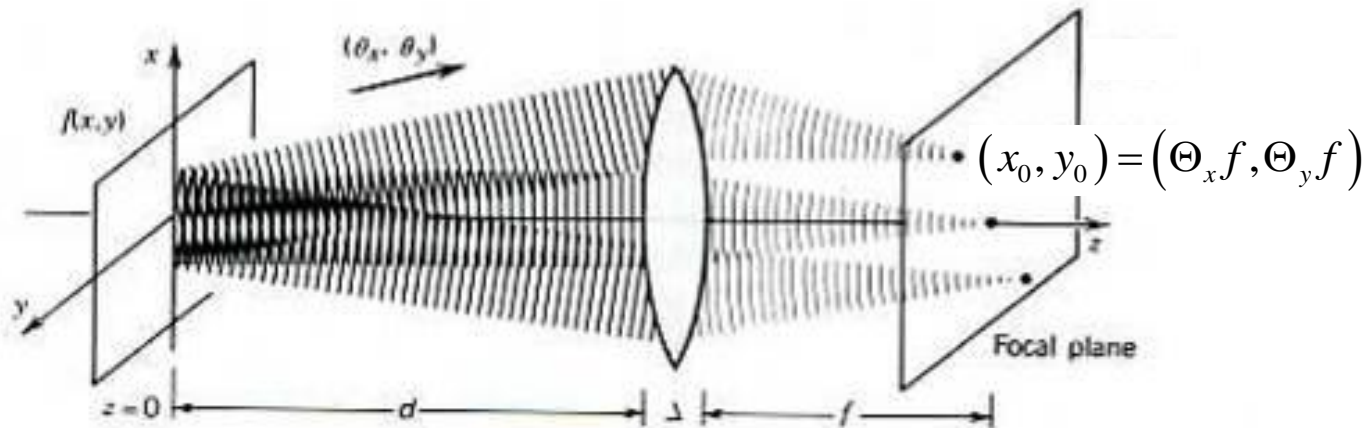
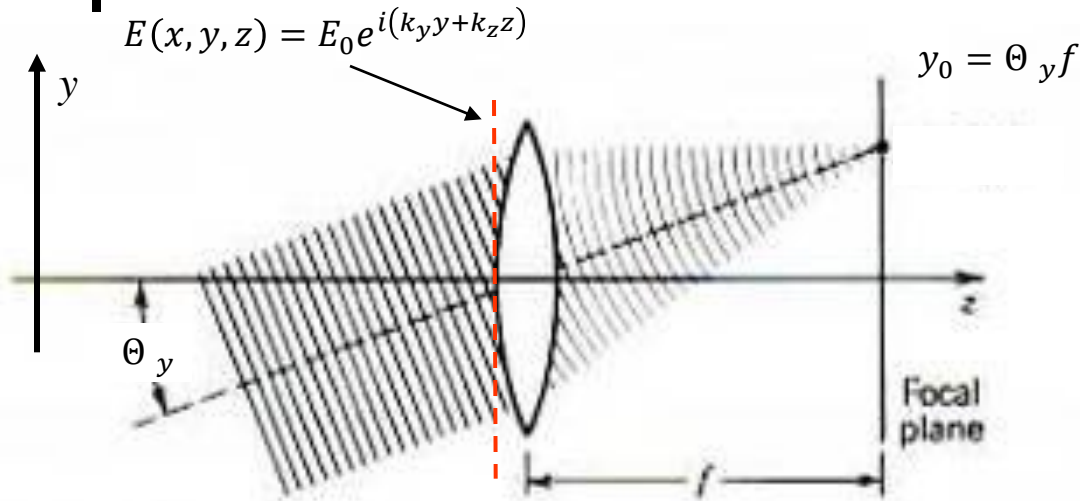
$$\begin{aligned} E_3(x, y, z) &= \frac{i}{\lambda z} e^{ikz} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E_2(x', y', 0) e^{\frac{ik}{2z}[(x-x')^2+(y-y')^2]} \\ &= \frac{i}{\lambda z} e^{ikz} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E_1(x', y') e^{-\frac{ik}{2f}(x'^2+y'^2)} e^{\frac{ik}{2z}[(x-x')^2+(y-y')^2]} \\ &= \frac{i}{\lambda z} e^{ik\left(z+\frac{x^2+y^2}{2z}\right)} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E_1(x', y') e^{\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{f}\right)(x'^2+y'^2)} e^{-\frac{ik}{z}(xx'+yy')} \end{aligned}$$

Jeśli $z = f$ to

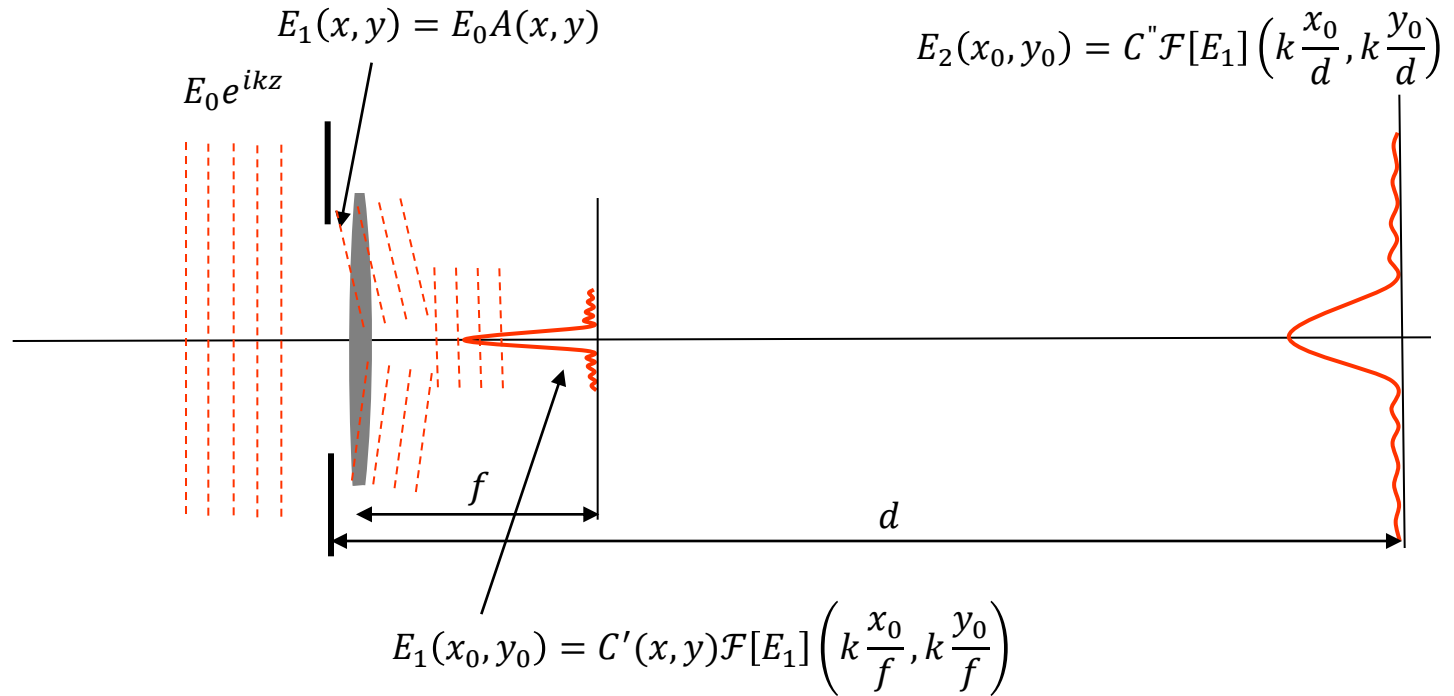
$$\begin{aligned} E_3(x, y, z) &= \frac{i2\pi}{\lambda f} e^{ik\left(f+\frac{x^2+y^2}{2f}\right)} \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} dx' dy' E_1(x', y') e^{-\frac{ik}{f}(xx'+yy')} \\ &= \frac{i2\pi}{\lambda f} e^{ik\left(f+\frac{x^2+y^2}{2f}\right)} \tilde{E}_1\left(k\frac{x}{f}, k\frac{y}{f}\right) \end{aligned}$$

Rozkład natężenia w płaszczyźnie ogniskowej jest takie jak w dalekim polu

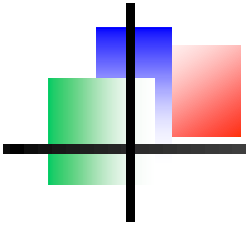
Soczewka i fala płaska



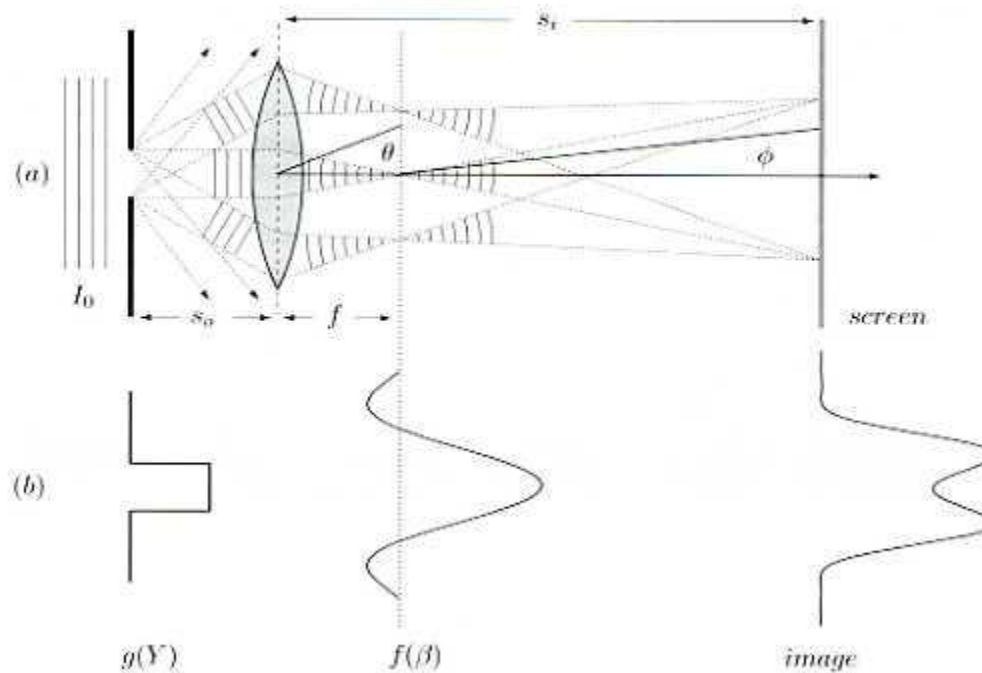
fala płaska i soczewka o skończonej aperturze



W płaszczyźnie Fraunhofera pole jest (z dokładnością do czynnika skalującego) takie samo jak w strefie dalekiego pola

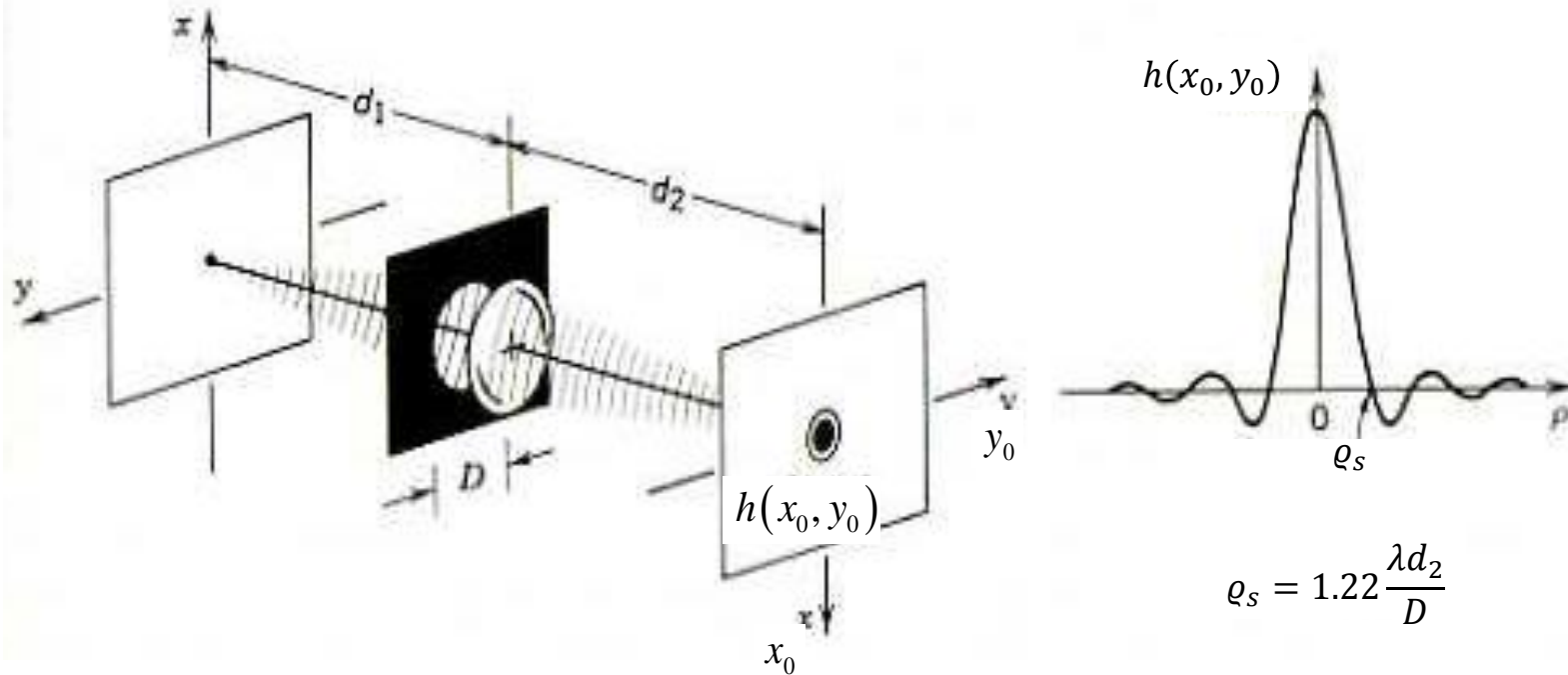


wpływ apertury na jakość obrazowania



Rozmiary ogniska

Funkcja odpowiedzi impulsowej dla układu obrazującego z pojedynczą soczewką

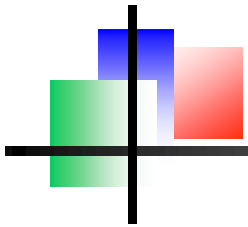


$$\rho_s = 1.22 \frac{\lambda d_2}{D}$$

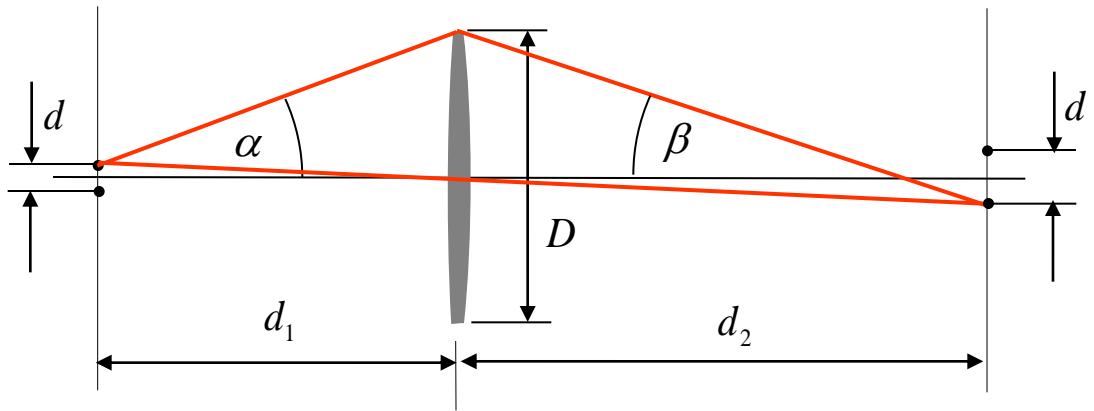
$$h(x_0, y_0) = h(0,0) \frac{2J_1(\pi D \rho / \lambda d_2)}{\pi D \rho / \lambda d_2}, \quad \rho = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

Jeżeli $d_1 = \infty$ (wiązka skolimowana) to $d_2 = f$ i:

$$h(x_0, y_0) = h(0,0) \frac{2J_1(\pi D \rho / \lambda f)}{\pi D \rho / \lambda f}$$



Rozdzielczość obrazowania

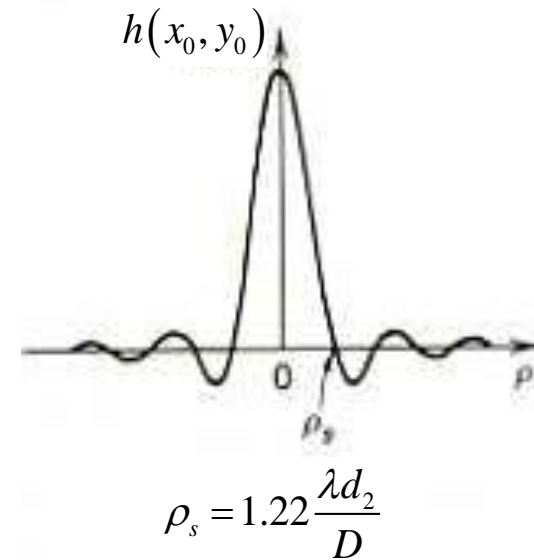


Kryterium Rayleigha:
maksimum jednego rozkładu
przypada na pierwsze zero drugiego

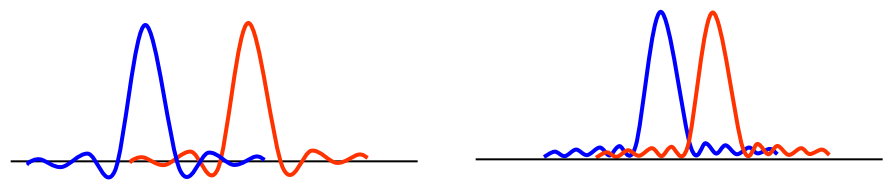
$$d' = \rho_s = 1.22 \frac{\lambda d_2}{D}$$

Ale

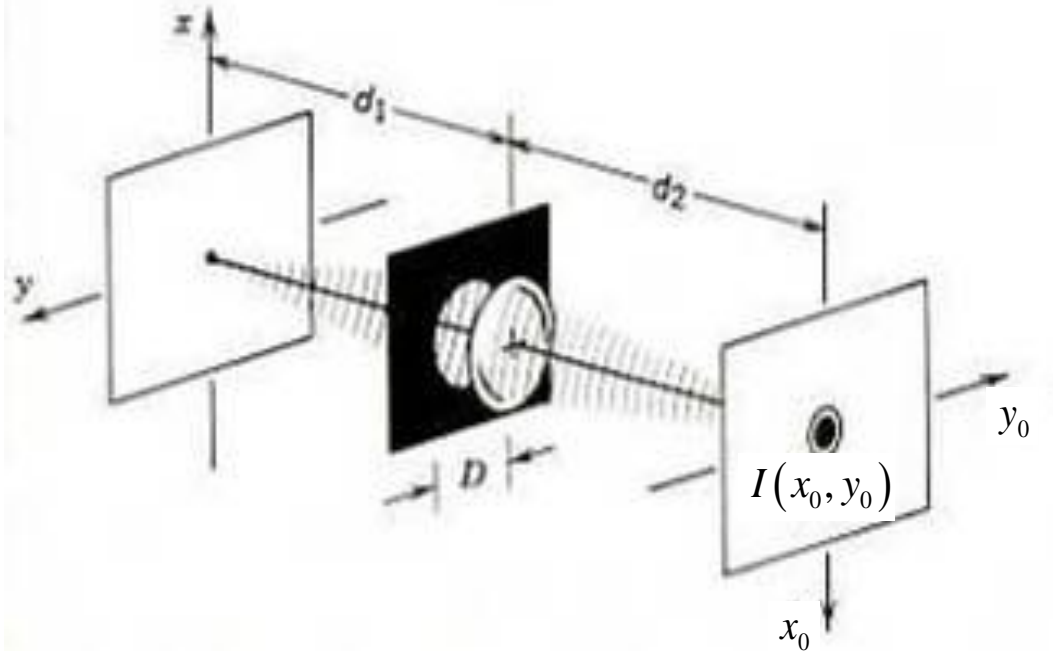
$$d = \frac{d_1}{d_2} d' = 1.22 \frac{\lambda d_1}{D}$$



obrazowanie spójne vs niespójne



Dyfrakcyjne ograniczenie na rozdzielczość



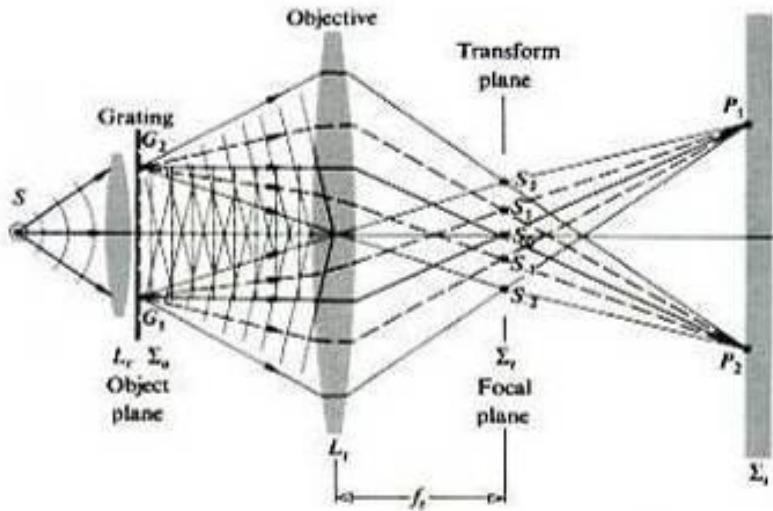
Rozdzielczość rośnie z liczbą $f = \frac{D}{d_2}$

$$I(x_0, y_0) = C \frac{J_1^1(\pi D \rho / \lambda d_2)}{(\pi D \rho / \lambda d_2)^2}$$

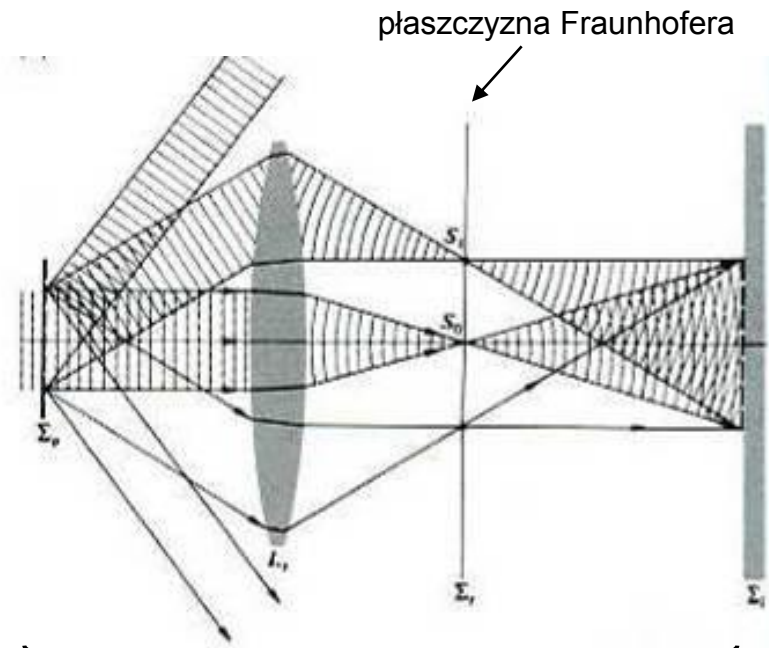
$$\rho_s = 1.22 \frac{\lambda d_2}{D}$$

Układy o dużej jasności mają dobrą rozdzielczość
Uwaga: aberracje

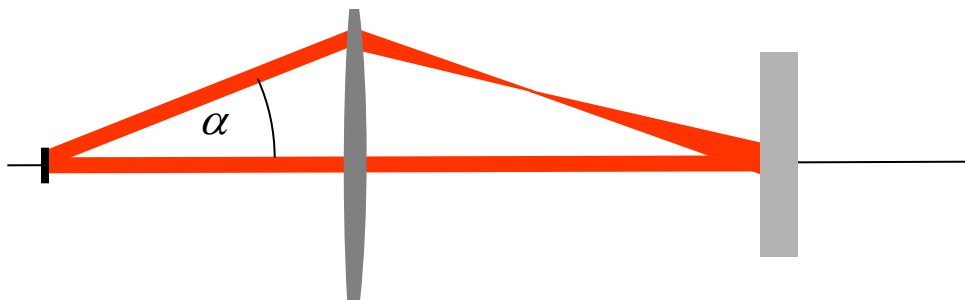
rozdzielczość układu obraz. wg. Abbego



obrazowanie



filtrowanie



Minimum: na soczewce mieszczą się przynajmniej rzędy 1-,0,1.

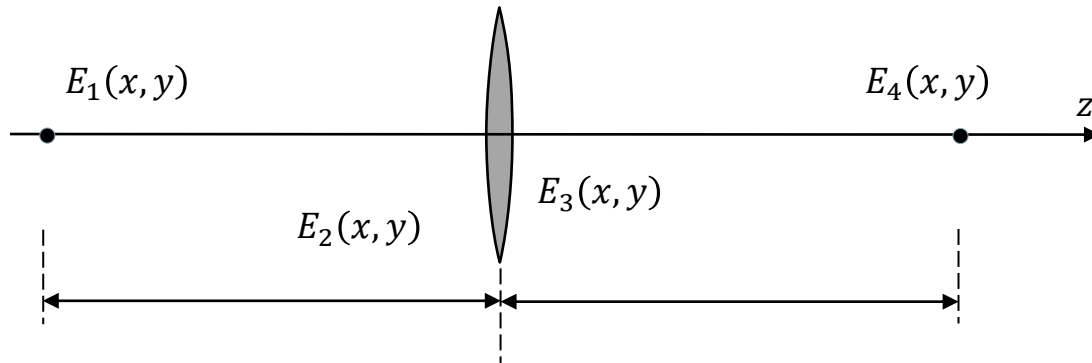
r-nie siatki dyfrakcyjnej:

$$\sin \alpha + \sin \beta = l \frac{\lambda}{nd}$$

ale $\alpha = 0$

$$d = \frac{\lambda}{n \sin \alpha} = \frac{\lambda}{NA}$$

soczewka jako transformata Fouriera



Zakładamy cienką soczewkę; liczymy po kolei pola: przed soczewką, za soczewką, w płaszczyźnie ogniskowej.

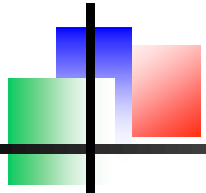
Rachunki są takie jak dla robiliśmy wcześniej tylko bardziej żmudne.

Wynik:

$$E_4(x_0, y_0) = C' \mathcal{F}[E_1] \left(k \frac{x_0}{f}, k \frac{y_0}{f} \right)$$

Rozkład pola w płaszczyźnie ogniskowej jest proporcjonalny do transformaty Fouriera pola w drugiej płaszczyźnie ogniskowej

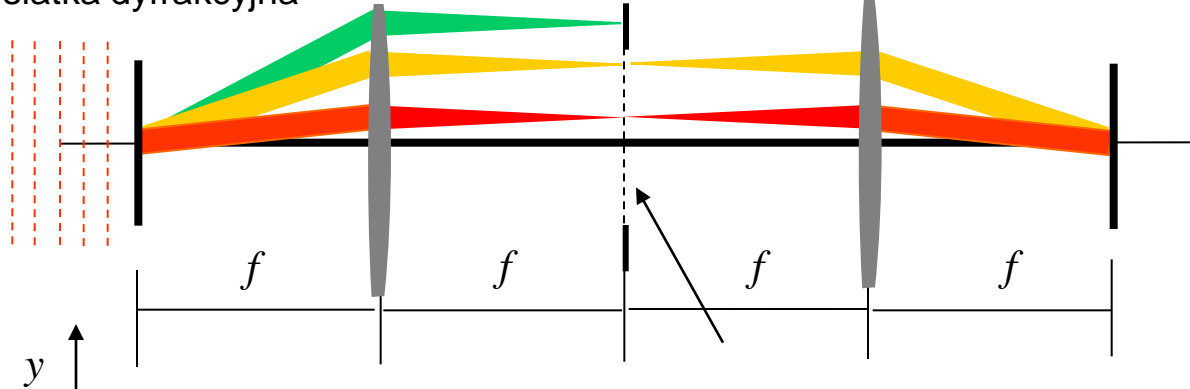
układ 4f - filtrowanie przestrzenne



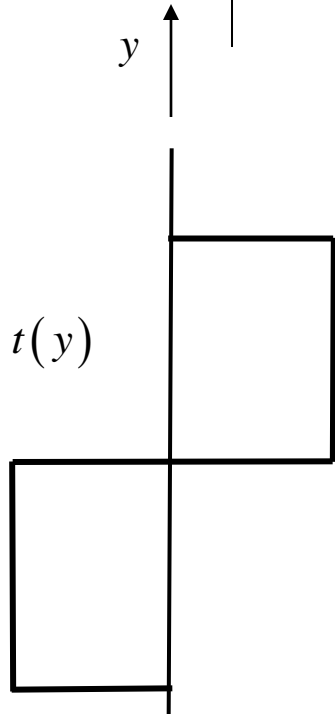
Prostokątna
siatka dyfrakcyjna

regulowana
przesłona

Obraz ilustruje sytuację, dla której obraz powstaje z ugięcia fal na 2 składowych fourierowskich siatki: $l = 1, 3$



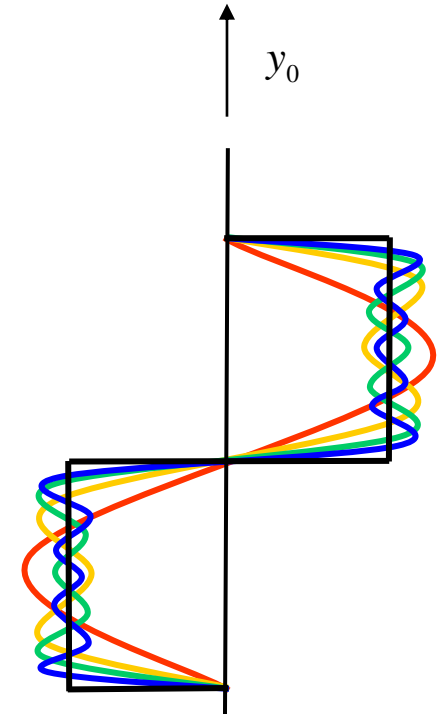
Obraz (pomarańczowa krzywa) nie jest ostry.

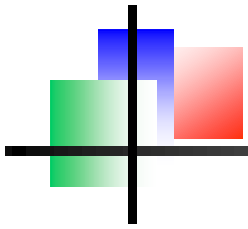


$$E_2(x_0, y_0) = C' \mathcal{F}[E_1] \left(k \frac{x_0}{f}, k \frac{y_0}{f} \right)$$

$$t(y) = \sum_{l=1,3,5,\dots} \frac{1}{l} \sin l \frac{2\pi y}{d}$$

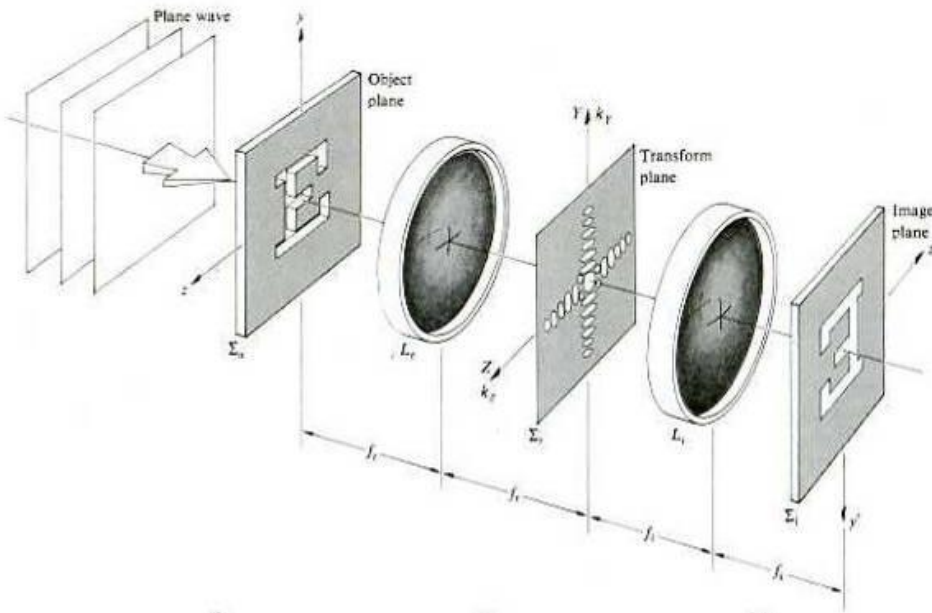
d - stała siatki



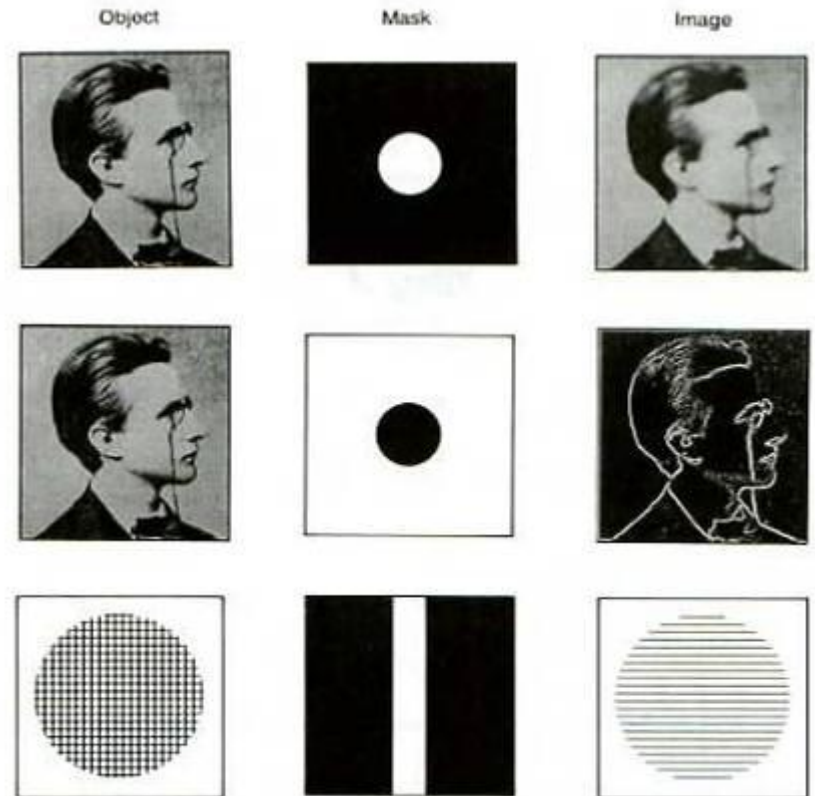


układ 4f – obróbka i rozpoznawanie obrazów

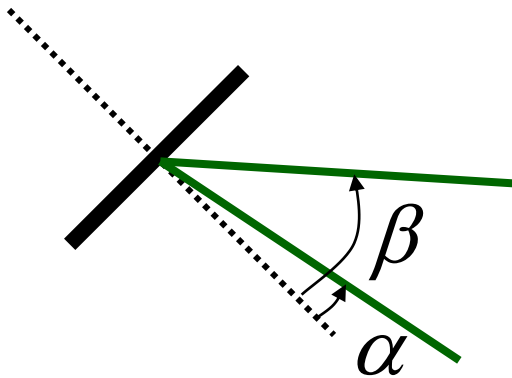
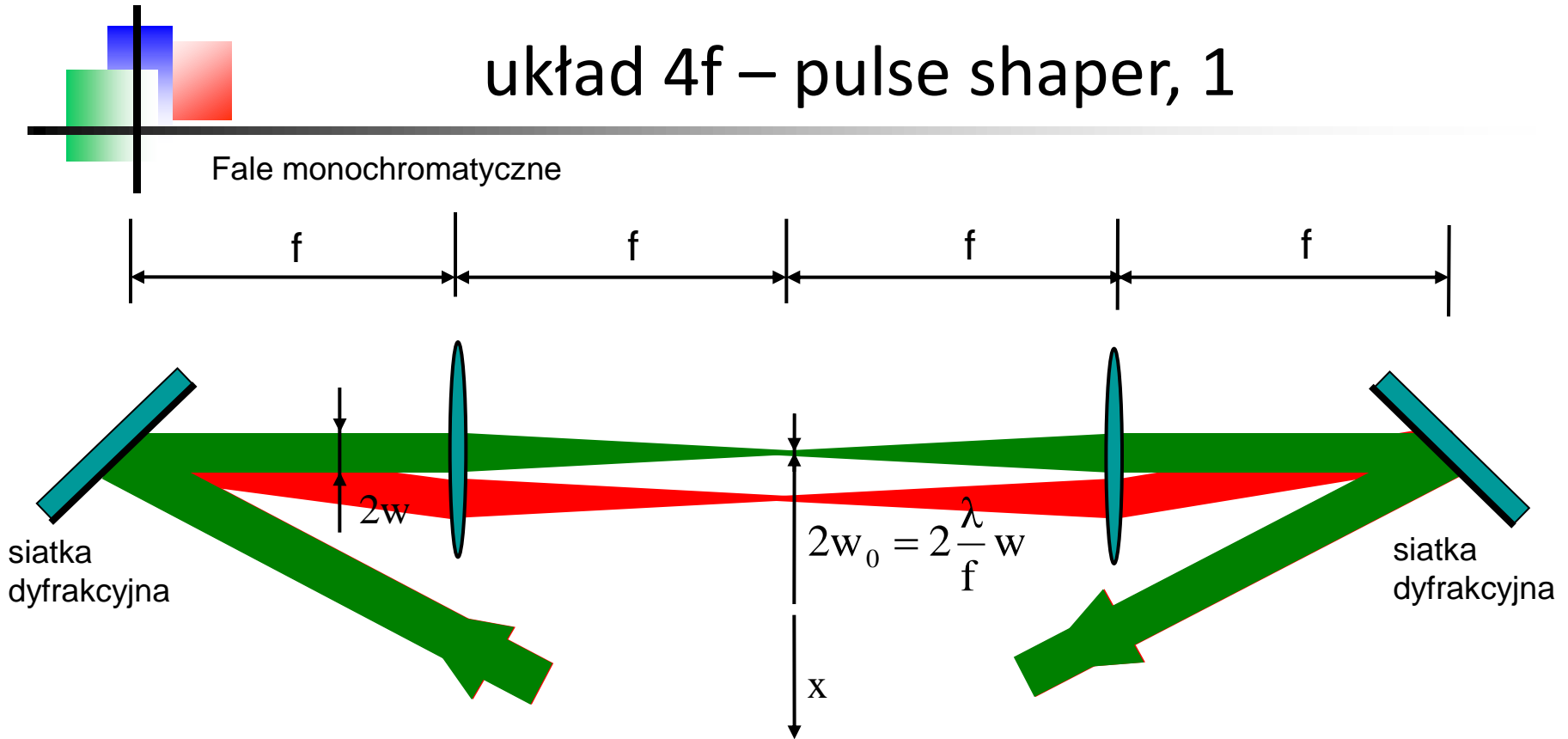
Duże częstotliwości przestrzenne – wysokie składowe fourierowskie



maski - modulatory ciekłokrystaliczne



układ 4f – pulse shaper, 1



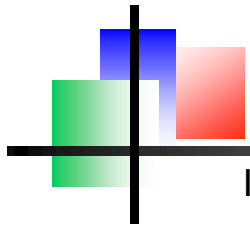
$$\sin\alpha + \sin\beta = \frac{\lambda}{d_s}$$

$$\frac{dx}{d\lambda} = f \frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{f}{d_s \cos\beta}$$

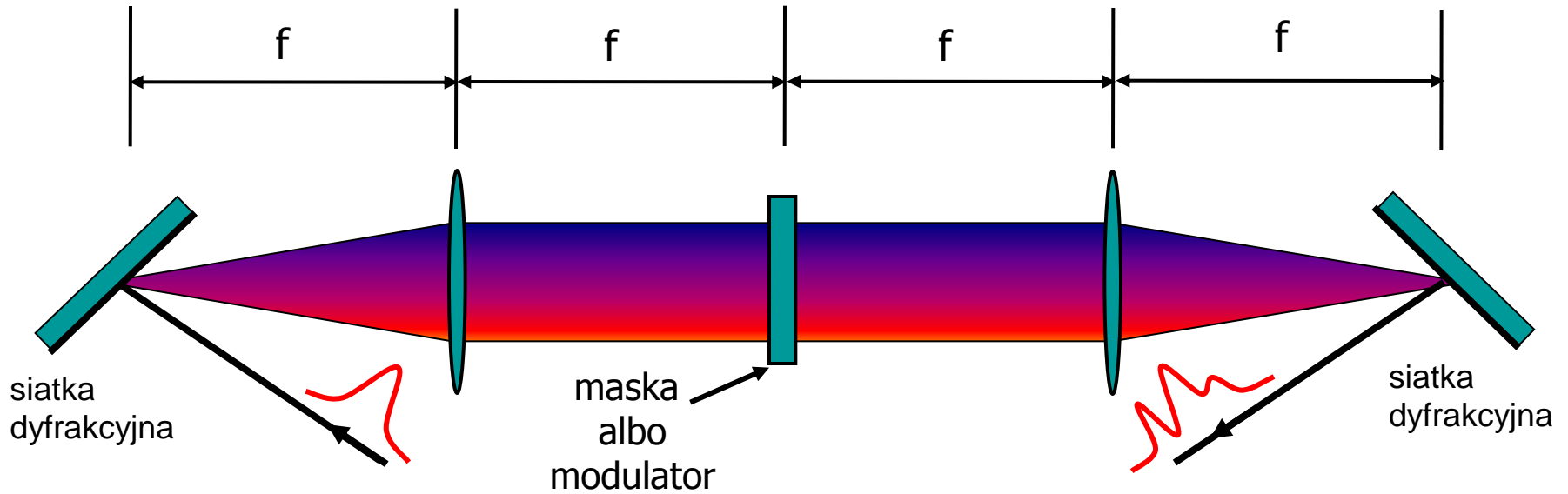
Rozdzielczość spektralna

$$\Delta\lambda = 2w_0 \cdot dx/d\lambda$$

układ 4f – pulse shaper, 2

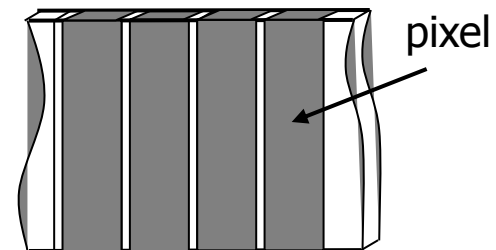


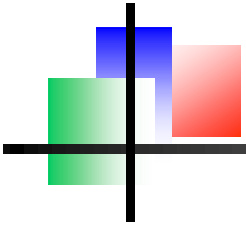
Impulsy femtosekundowe



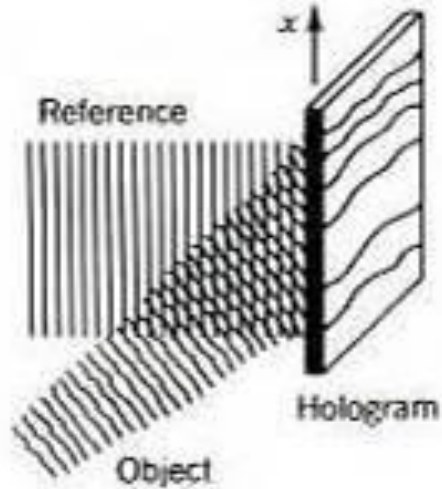
$$E_{\text{out}}(\omega) = S(\omega) \cdot e^{i\Phi(\omega)} \cdot E_{\text{in}}(\omega)$$

Spatial Light Modulator
(liquid crystal)





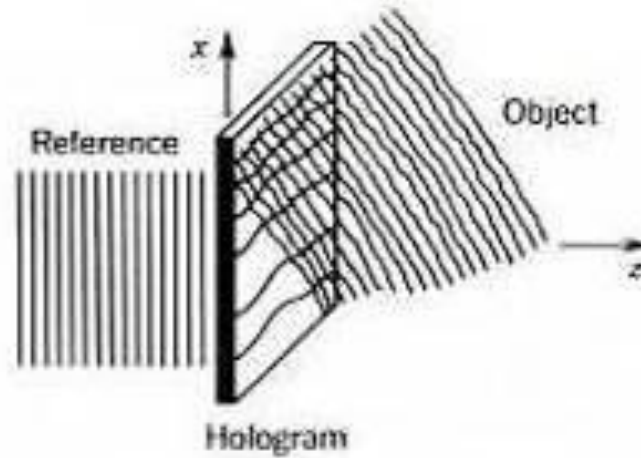
Holografia, 1



REJESTRACJA

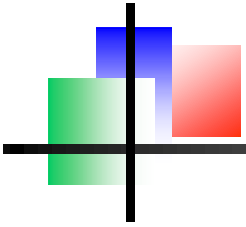
Naświetlamy film drobnoziarnisty tak, że jego transmisja jest proporcjonalna do natężenia światła

$$t \propto |E_o + E_r|^2 = |E_o|^2 + |E_r|^2 + E_o E_r^* + E_o^* E_r$$



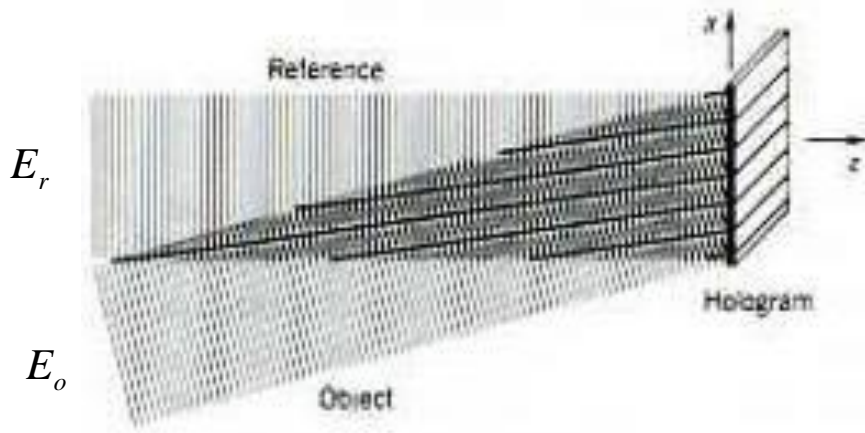
ODTWARZANIE

$$E = tE_r \propto |E_o|^2 E_r + |E_r|^2 E_r + |E_r|^2 E_o + E_r^2 E_o^*$$

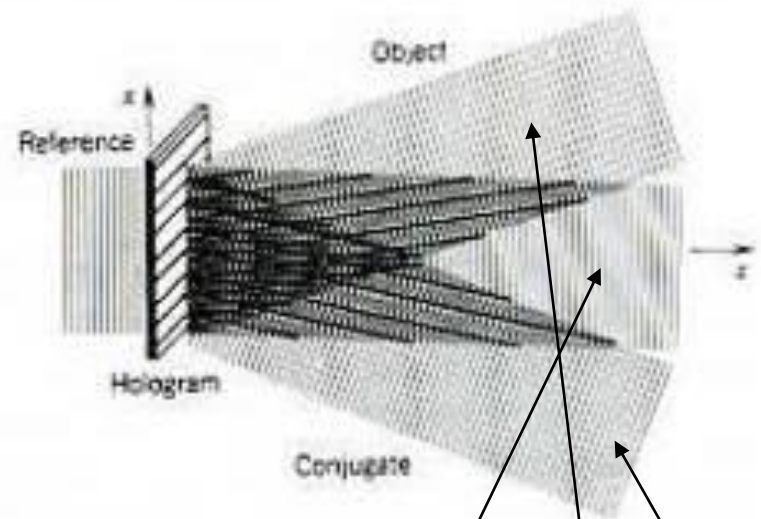


Holografia, 2

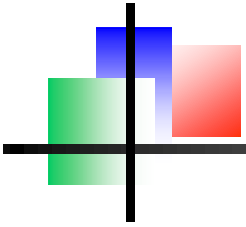
REJESTRACJA



ODTWARZANIE

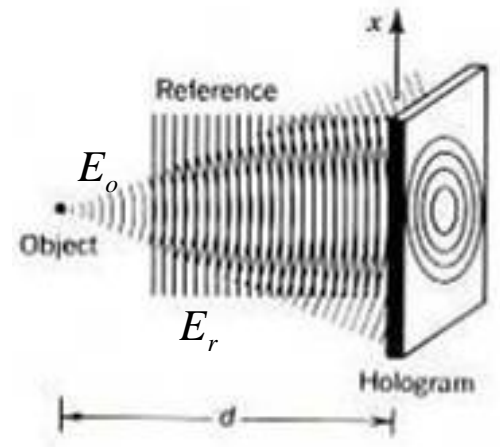


$$E = tE_r \propto (|E_o|^2 + |E_r|^2)E_r + |E_r|^2 E_o + E_o^* E_r^2$$

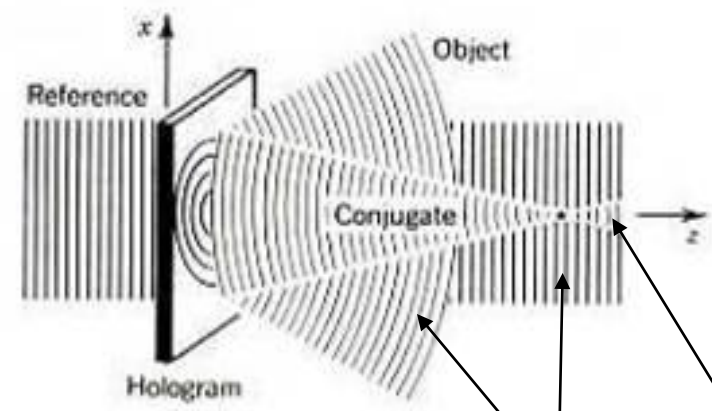


Holografia, 3

REJESTRACJA



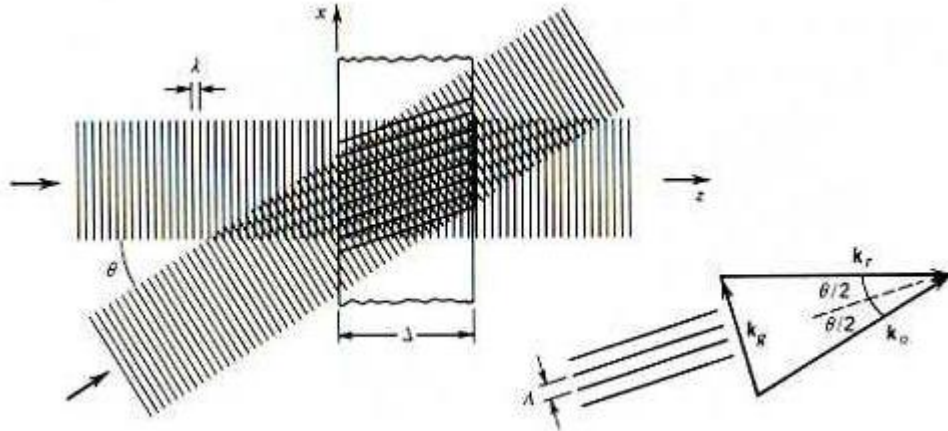
ODTWARZANIE



$$E = tE_r \propto (|E_o|^2 + |E_r|^2)E_r + |E_r|^2 E_o + E_o^* E_r^2$$

Hologramy objętościowe

REJESTRACJA



$$I(x, y, z) = \left| \sqrt{I_r} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} + \sqrt{I_o} e^{i\vec{k}_o \cdot \vec{r}} \right|^2$$

$$= I_r + I_o + \sqrt{I_r I_o} \cos(\vec{k}_o \cdot \vec{r} - \vec{k}_r \cdot \vec{r})$$

$$= I_r + I_o + \sqrt{I_r I_o} \cos(\vec{k}_g \cdot \vec{r})$$

$$\vec{k}_g = \vec{k}_o - \vec{k}_r$$

ODTWARZANIE

