

Podstawy Fizyki IV: Optyka z elementami fizyki współczesnej

wykład 1, 13.02.2012

wykład:	Czesław Radzewicz
pokazy:	Radosław Chrapkiewicz, Filip Ozimek
ćwiczenia:	Ernest Grodner

Wykład kursowy należący do kategorii „wstęp do fizyki”. Jego naczelnym celem jest zapoznanie słuchaczy z podstawami optyki geometrycznej, falowej oraz elektromagnetyzmu w zakresie dotyczącym promieniowania elektromagnetycznego. Ponadto, wprowadzamy także elementy fizyki kwantowej: kwantyzacja pola EM, budowa atomu, wzmacnianie światła, lasery.

Program:

1. Fale: równanie falowe, fronty falowe, prędkość fazowa, prędkość grupowa, fala płaska, sferyczna, cylindryczna.
2. Fale elektromagnetyczne (EM); równania Maxwella, prędkość światła, gęstość energii, przepływ energii i pęd fali EM, efekt Dopplera, źródła fal EM, promieniowanie drgającego dipola, detektory fal EM, propagacja w dielektrykach, model Lorentza na współczynnik załamania, fale EM w przewodnikach, widmo fali, widzenie barwne, barwy czyste i mieszane.
3. Odbicie i załamanie światła; lustro, granicy pomiędzy dielektrykami, zasada Fermata, wzory Fresnela, kąt Brewstera, całkowite wewnętrzne odbicie, falowody.
4. Optyka geometryczna; eikonał, propagacja w ośrodku z gradientem współczynnika załamania, owale Kartezjusza, sferyczna granica pomiędzy dielektrykami, przybliżenie przyosiowe, cienka soczewka, układy gaussowskie i ich opis macierzami ABCD, punkty kardynalne układu soczewkowego, apertury, aberracje układów soczewkowych, przyrządy soczewkowe.
układów obrazujących.

Program, c.d.:

5. Superpozycja fal EM, interferometry: Younga, Michelsona, fourierowski, Macha-Zhendera, Sagnaca, Fabry-Perot, powłoki dielektryczne, siatka dyfrakcyjna, pryzmat, interferencja w dziedzinie czasu – impulsy, wiązka gaussowska.
6. Dyfrakcja światła: konstrukcja Huyghensa, całka Fresnela-Kirchoffa, całka Sommerfelda, przybliżenie Fraunhofera, przybliżenie Fresnela, optyka fourierowska, zdolność rozdzielcza układów obrazujących.
7. Dwójłomność: fala zwyczajna i nadzwyczajna, polaryzatory krystaliczne, płytki falowe
8. Polaryzacja fali EM, formalizm Jonesa, wektor Stokesa, sfera Poincare, polaryzacja częściowa.
9. Modulacja światła; efekt elasto-optyczny, elektro-optyczny, Kerna, Faradaya.
10. Rozpraszanie światła; Rayleigha, Mie, Ramana, luminescencja, fluorescencja, fosforescencja.
11. Optyka nieliniowa; nieliniowa polaryzacja ośrodka, dopasowanie fazowe.
12. Elementy fizyki kwantowej; kwantyzacja promieniowania EM; efekt fotoelektryczny, własności fotonu, statystyka Poissona, interferencja z pojedynczymi fotonami, stan koherentny, interferencja 2 fotonów, kryptografia kwantowa, promienie katodowe i anodowe, fale materii, równanie Schrodingera, doświadczenia Rutherforda i Francka-Hertza, kwantowy moment pędu, atom wodoru, procesy radiacyjne w atomach, współczynniki Einsteina, wzmocnienie światła, nasycenie wzmocnienia, laser, niektóre zastosowania laserów.

Księga Rodzaju, rozdział 1:

1. Na początku stworzył Bóg niebo i ziemię.
2. A ziemia była niekształtna i próżna, i ciemność była nad przepaścią, a Duch Boży unaszał się nad wodami.
3. I rzekł Bóg: **Niech będzie światłość; i stała się światłość**

Księga Rodzaju, rozdział 1:

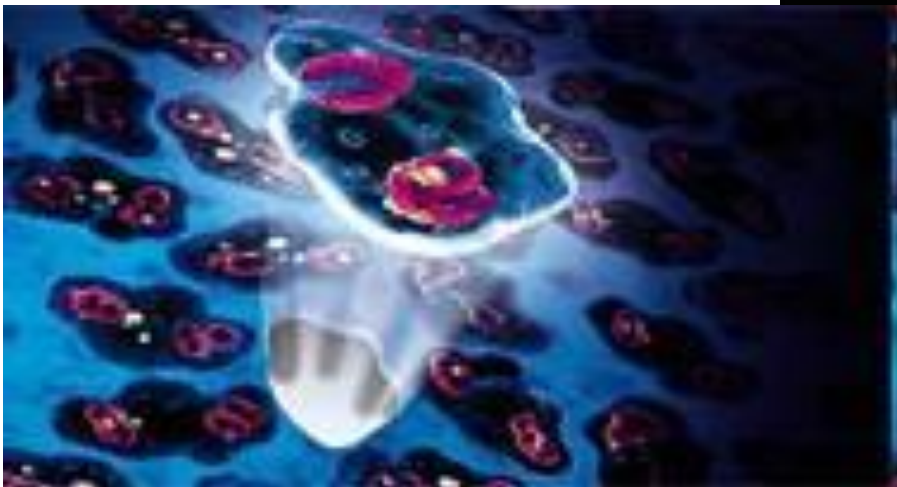
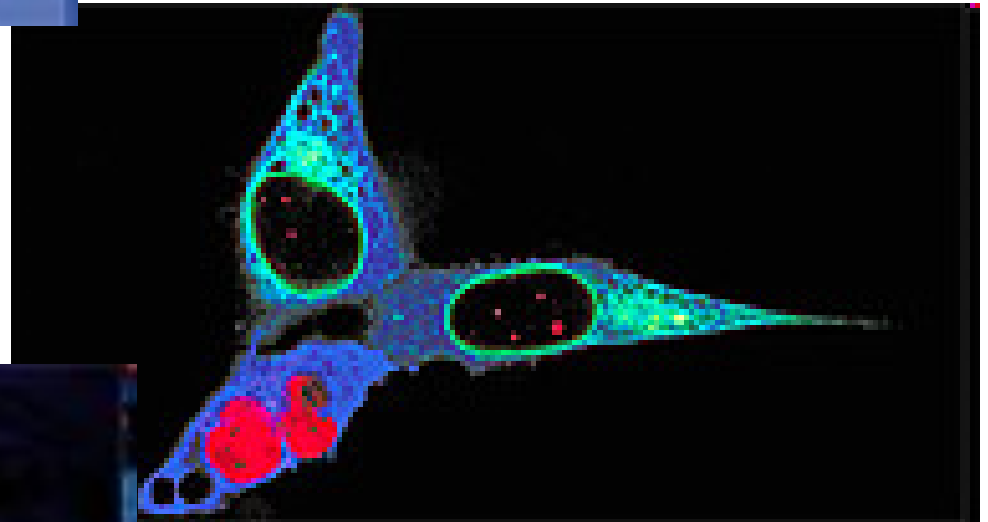
1. Na początku stworzył Bóg niebo i ziemię.
2. A ziemia była niekształtowa i próżna, i ciemność była nad przepaścią, a Duch Boży unaszał się nad wodami.
3. I rzekł Bóg: **Niech będzie światłość; i stała się światłość.**

dzięki światłu oglądamy rzeczy duże





... i rzeczy małe



... rzeczy piękne



Pierre-Auguste Renoir, Moulin de la Galette

... i rzeczy brzydkie



Vincent van Gogh, Zjadacze ziemniaków

(krótka) historia optyki ilustrowana portretami

1. Starożytność

Euklides – światło rozchodzi się po liniach prostych (zasada Fermata?)

soczewki skupiające

Platon, Kleomedes, Ptolomeusz – załamanie światła

Arystoteles: $c = \infty$

2. Średniowiecze

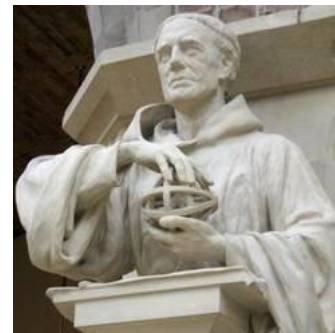
Alhazen (ok.. 1000AD) – płaszczyzna padania = płaszczyzna obicia,

lustro sferyczne i paraboliczne, budowa oka ludzkiego

Erazmus Ciołek, Witelo, Witelon, Vitellio (1230-1280?)

Roger Bacon

szkła korekcyjne (?), teleskop(?)



Roger Bacon (1215-1294)

3. Odrodzenie

Leonardo da Vinci

kamera obscura



Leonardo da Vinci (1452-1519)



Witelo, *De perspectiva*

„Witelona matematyka uczonego o optyce, to jest o istocie, przyczynie i padaniu promieni wzroku, światła, barw oraz kształtów, którą powszechnie nazywają perspektywą, ksiąg dziesięcioro”

XVII wiek

1605, *Astronomiae Pars Optica*
 $1/r^2$, kamera obscura, odbicie od lustra
płaskiego i wklęsłego, załamanie dla małych
kątów, paralaksa, obraz odwrócony na
siatkówce oka



Johannes Kepler (1571-1630)



Prawo sinusów (załamanie), owale obrazujące

Rene Descartes (1596-1650)

Prawo Snella



Willebrord Snell (1591-1626)



Zasada Fermata

Pierre Fermat (1607-1665)

1608, Hans Lippershey – patent na lunetę
Galileusz
Przełom XVII/XVIII w.: Zacharias Janssen -
mikroskop



XVII wiek, c.d.



Christiaan Huyghens (1629-1695)



PREFACE

As happens in all the sciences in which Geometry is applied to matter, the demonstrations concerning Optics are founded on truths drawn from experience. Such are that the rays of light are propagated in straight lines; that the angles of reflexion and of incidence are equal; and that in refraction the ray is bent according to the law of sines, now so well known, and which is no less certain than the preceding laws.

C. Huyghens, *Treatise on Light*

XVII wiek, c.d.

Podejście falowe, odbicie i załamanie,
dwójłomność, polaryzacja światła,
rekonstrukcja frontów falowych



Christiaan Huygens (1629-1695)

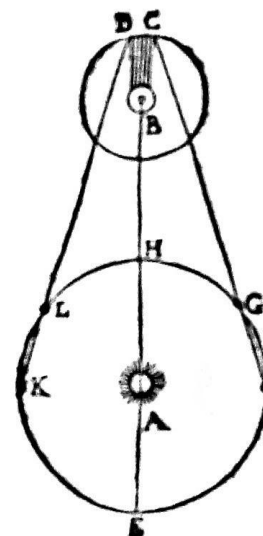
Rozszczepienie barw w pryzmacie, luneta
lustrzana, zwolennik podejścia korpuskularnego



Isaac Newton (1642-1727)



1676, Dane Ole Romer
zaćmienie księżyca Jowisza Io
 $c = 2.4 \cdot 10^8$ m/s



XIX wiek

Światło jest falą:
zasada superpozycji, interferencja na cienkich
błonach, doświadczenie Younga



Thomas Young (1773-1829)

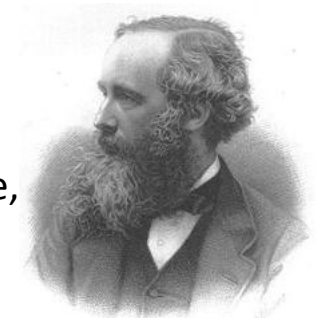


Augustine Fresnel (1788-1827)

Światło jest falą podłużną (poprzeczną):
dyfrakcja na otworze w ekranie
polaryzacja światła

Światło jest falą elektromagnetyczną w eterze,

$$c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$



James Clerk Maxwell (1831-1879)

1849: Armand Hippolyte Louis Fizeau,
 $c=315\ 000$ km/s w powietrzu

1850: Dominique Francois Arago, $v < c$

XX wiek

Doświadczenie wyklucza ruch
Ziemi względem eteru – światło
może rozchodzić się w próżni



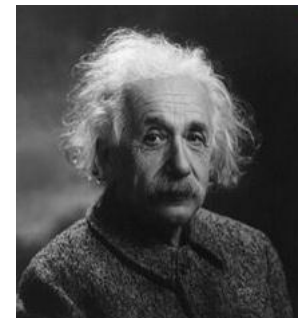
Albert Abraham Michelson (1852-1931)



Hipoteza kwantowa
- energia fali
elektromagnetycznej
jest skwantowana

Max Planck (1858-1947)

STW – prędkość fal EM nie zależy
od układu odniesienia ani ruchu
źródła fal.



Albert Einstein (1879-1955)

ostatnie 20 lat nagrody Nobla z fizyki



2009 - [Charles K. Kao, Willard S. Boyle, George E. Smith](#)

2008 - [Yoichiro Nambu, Makoto Kobayashi, Toshihide Maskawa](#)

2007 - [Albert Fert, Peter Grünberg](#)



2006 - [John C. Mather, George F. Smoot](#)

2005 - [Roy J. Glauber, John L. Hall, Theodor W. Hänsch](#)

2004 - [David J. Gross, H. David Politzer, Frank Wilczek](#)

2003 - [Alexei A. Abrikosov, Vitaly L. Ginzburg, Anthony J. Leggett](#)



2002 - [Raymond Davis Jr., Masatoshi Koshiba, Riccardo Giacconi](#)

2001 - [Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle, Carl E. Wieman](#)

2000 - [Zhores I. Alferov, Herbert Kroemer, Jack S. Kilby](#)

1999 - [Gerardus 't Hooft, Martinus J.G. Veltman](#)



1998 - [Robert B. Laughlin, Horst L. Störmer, Daniel C. Tsui](#)

1997 - [Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji, William D. Phillips](#)

1996 - [David M. Lee, Douglas D. Osheroff, Robert C. Richardson](#)

1995 - [Martin L. Perl, Frederick Reines](#)

1994 - [Bertram N. Brockhouse, Clifford G. Shull](#)

1993 - [Russell A. Hulse, Joseph H. Taylor Jr.](#)

1992 - [Georges Charpak](#)

ostatnie 20 lat nagrody Nobla z fizyki

The Nobel Prize in Physics 1997

"for development of methods to cool and trap atoms with laser light"



Steven Chu
1/3 of the prize
USA
Stanford University



Claude Cohen-Tannoudii
1/3 of the prize
France
College de France
Ecole Normale Superieure



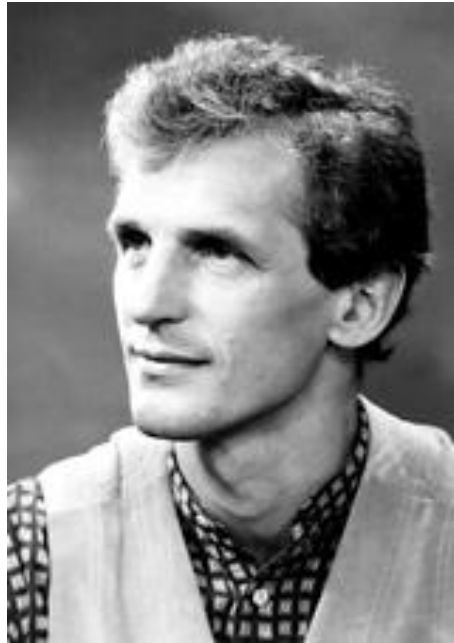
William D. Philips
1/3 of the prize
USA
National Institute of
Standars and Technology

The Nobel Prize in Physics 2001

"for the achievement of Bose-Einstein condensation in dilute gases of alkali atoms, and for early fundamental studies of the properties of the condensates"



Eric A. Cornell
1/3 of the prize
USA
University of Colorado



Wolfgang Ketterle
1/3 of the prize
Germany
Massachusetts Institute of
Technology (MIT)

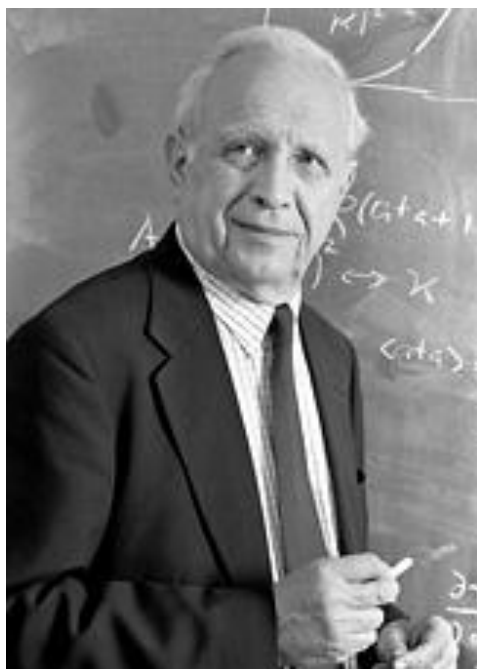


Carl E. Wieman
1/3 of the prize
USA
University of Colorado

The Nobel Prize in Physics 2005

"for his contribution to the quantum theory of optical coherence"

"for their contributions to the development of laser-based precision spectroscopy, including the optical frequency comb technique"



Roy J. Glauber
1/2 of the prize
USA
Harvard University



John L. Hall
1/4 of the prize
USA
University of Colorado



Theodor W. Hänsch
1/4 of the prize
Germany
Max-Planck-Institut für
Quantenoptik

The Nobel Prize in Physics 2009

"for groundbreaking achievements concerning the transmission of light in fibers for optical communication"



Charles K. Kao
1/2 of the prize
United Kingdom
Standard Telecommunication
Laboratories



Willard S. Boyle
1/4 of the prize
USA
Bell Laboratories



George E. Smith
1/4 of the prize
USA
Bell Laboratories

równanie falowe 1-D

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

ψ - amplituda

v - prędkość (?) [m/s]

Dla fal w ośrodkach materialnych – v zależy od własności ośrodka
przykład: fale mechaniczne na strunie:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

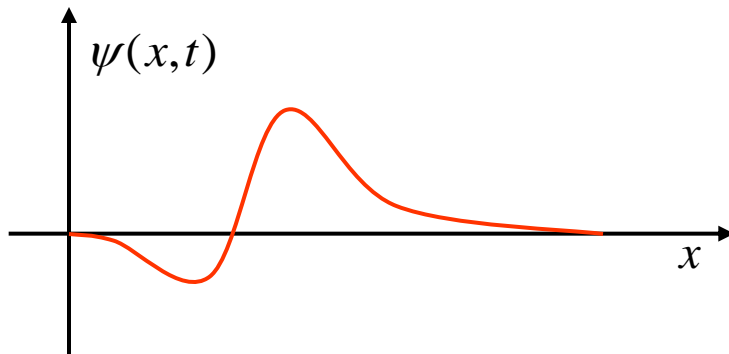
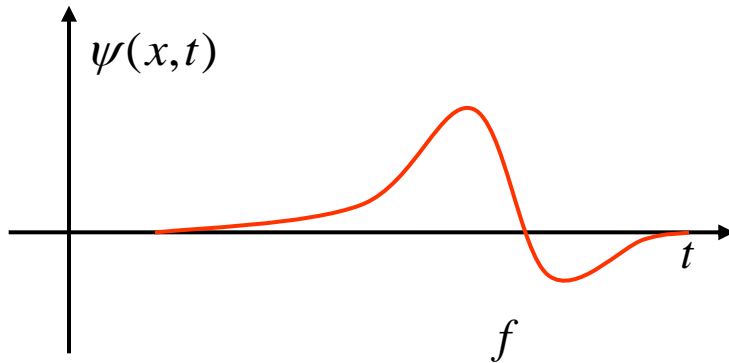
T – naprężenie

μ – gęstość liniowa

Ogólna postać rozwiązania równania falowego 1-D dla $v = \text{const}$

$$\psi(x, t) = f(x \pm vt)$$

f to dowolna funkcja rzeczywista



dowód

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi = 0$$

nowe zmienne:

$$\xi = t - \frac{x}{v}, \quad \eta = t + \frac{x}{v}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \Leftrightarrow \psi(\xi, \eta) = a\psi_1(\xi) + b\psi_2(\eta)$$

$$\psi = a\psi_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) + \psi_2 \left(t + \frac{x}{v} \right)$$

fale harmoniczne 1-D

rozważmy funkcję $f(x)$ w postaci harmoniki:

$$f(u) = A \sin(ku)$$

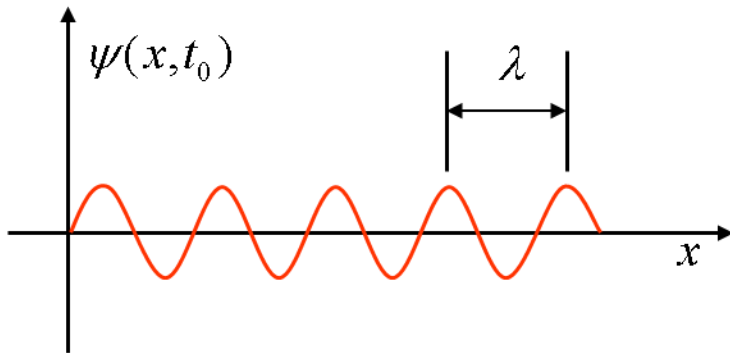
liczba falowa: k [1/m]

fala biegnąca w kierunku $+x$ to

$$\psi(x, t) = A \sin k(x - vt)$$

fala biegnąca w kierunku $-x$ to

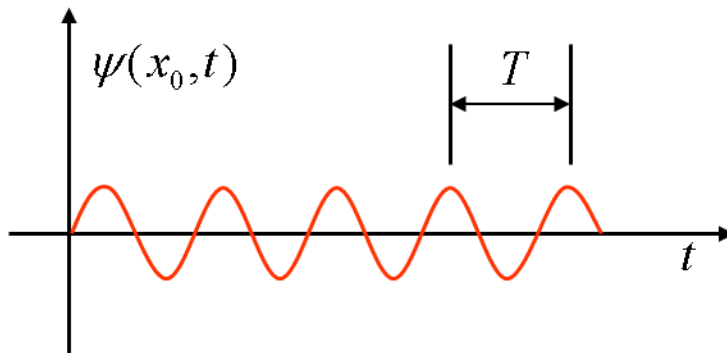
$$\psi(x, t) = A \sin k(x + vt)$$



okres przestrzenny - długość fali λ

$$k\lambda = 2\pi$$

$$\lambda = 2\pi/k \quad [\text{m}]$$



okres czasowy - T

$$kvT = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{kv} = \frac{\lambda}{v} \quad [\text{s}]$$

częstość - liczba cykli na sekundę

$$\nu = 1/T \quad [1/s]$$

częstość kołowa

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad [radian/s]$$

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= A \sin k(x \pm vt) \\ &= A \sin(kx - \omega t) \\ &= A \sin 2\pi\nu \left(\frac{x}{v} \pm t \right)\end{aligned}$$

faza fali harmoniczej:

$$\varphi = kx - vt$$

ogólnie:

$$\varphi = kx - vt + \varepsilon$$

stała faza?

1. podejście „dziecinne”:

$$\varphi = kx - \omega t + \varepsilon = \varepsilon$$
$$v_{\varphi} = \frac{x}{t} = \frac{\omega}{k} = v$$

2. podejście „dorosłe”

$$v_{\varphi} = \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{\varphi} = - \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_x}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_t} = \frac{\omega}{k} = v$$

prędkość fazowa

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k}$$

zasada superpozycji

Równanie falowe

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

jest liniowe – suma rozwiązań jest także rozwiązaniem

Sprawdzamy to bezpośrednim rachunkiem:

niech ψ_1, ψ_2 będą rozwiązaniami r. f.

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) \psi_1 = 0, \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) \psi_2 = 0$$

Wtedy:

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) \psi = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) \psi_1 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) \psi_2 = 0$$

Uwaga: efekty nieliniowe, np. nieliniowe r-nie Schrodingera

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma |\psi|^2 = 0 \right)$$

zespolona amplituda fali

Korzystamy z formuły Eulera:

$$\sin\Theta = \text{Im}[e^{i\Theta}]$$

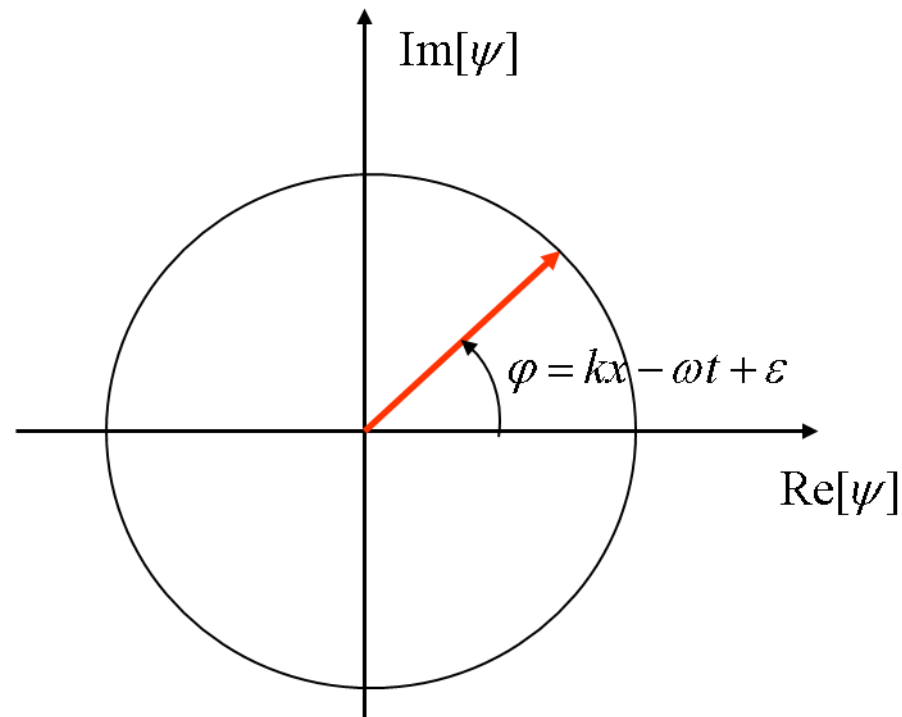
aby zapisać

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= A \sin(kx \pm \omega t + \varepsilon) \\ &= A \text{Im}[e^{i\Theta}]\end{aligned}$$

Zwyczajowo używa się części rzeczywistej

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= A \cos(kx \pm \omega t + \varepsilon) \\ &= A \text{Re}[e^{i\Theta}]\end{aligned}$$

Diagram Arganda

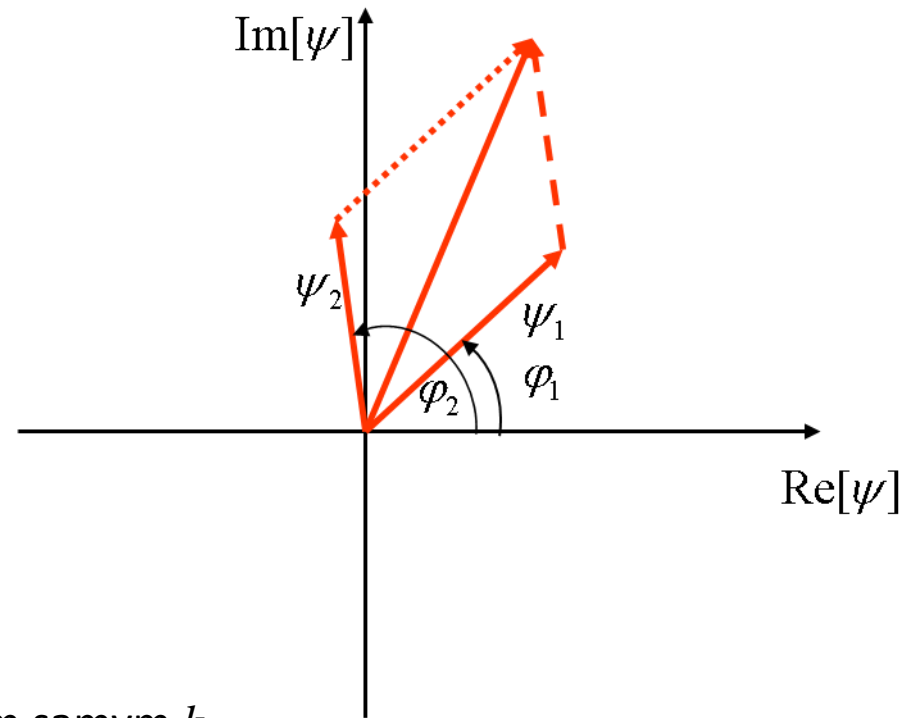


dodawanie fal (drgań) harmonicznyc

$$\psi_1 = A_1 e^{i\varphi_1}$$

$$\psi_2 = A_2 e^{i\varphi_2}$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$



Przykład: dwie fale o tej samej częstotliwości i takim samym k

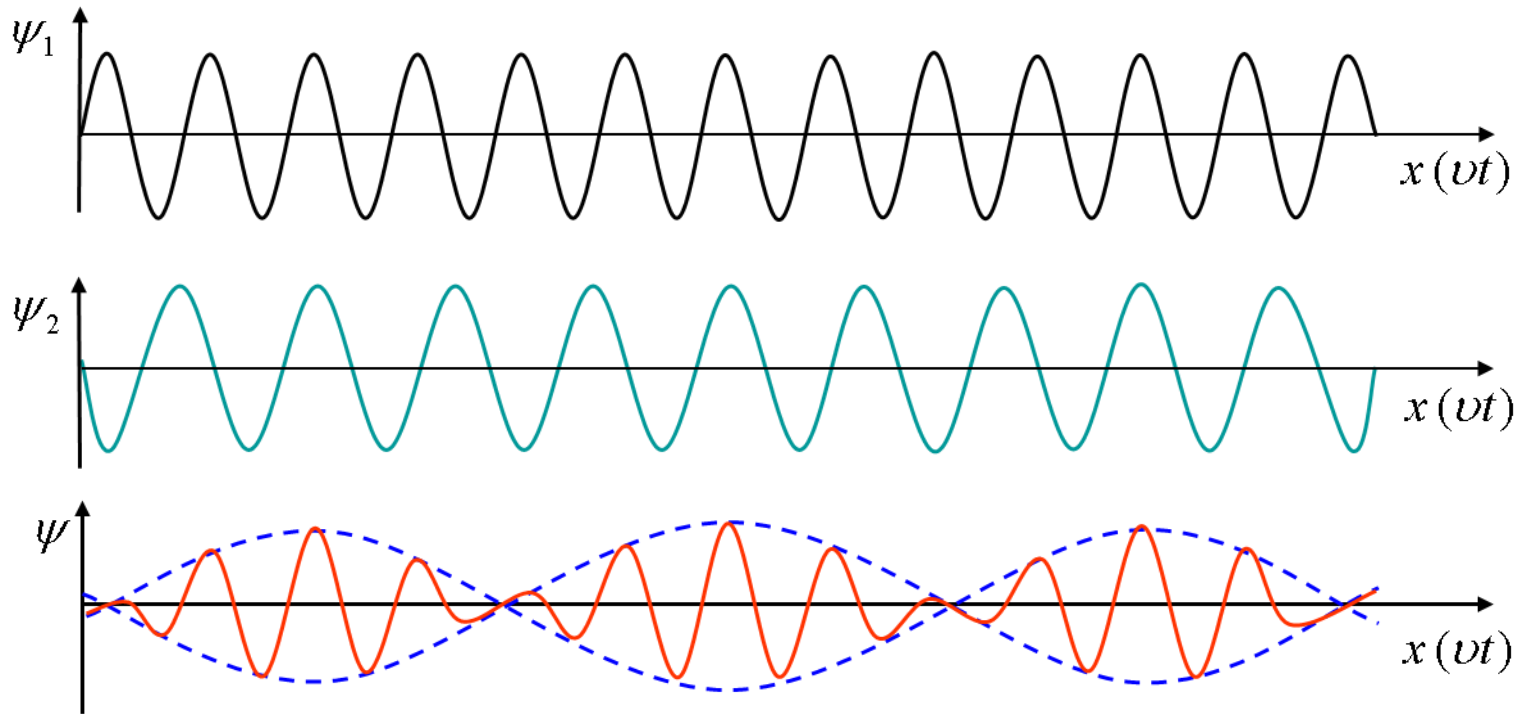
$$\psi_1(x, t) = A_1 e^{i(kx - \omega t + \varepsilon_1)}, \psi_2(x, t) = A_2 e^{i(kx - \omega t + \varepsilon_2)}$$

$$\psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) = A e^{i(kx - \omega t + \varepsilon)}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}$$

$$\tan \varepsilon = \frac{A_1 \sin \varepsilon_1 + A_2 \sin \varepsilon_2}{A_1 \cos \varepsilon_1 + A_2 \cos \varepsilon_2}$$

dudnienia, 1



$$\psi_1(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$$

$$\psi_2(x, t) = Ae^{i[(k + \delta k)x - (\omega + \delta \omega)t]}$$

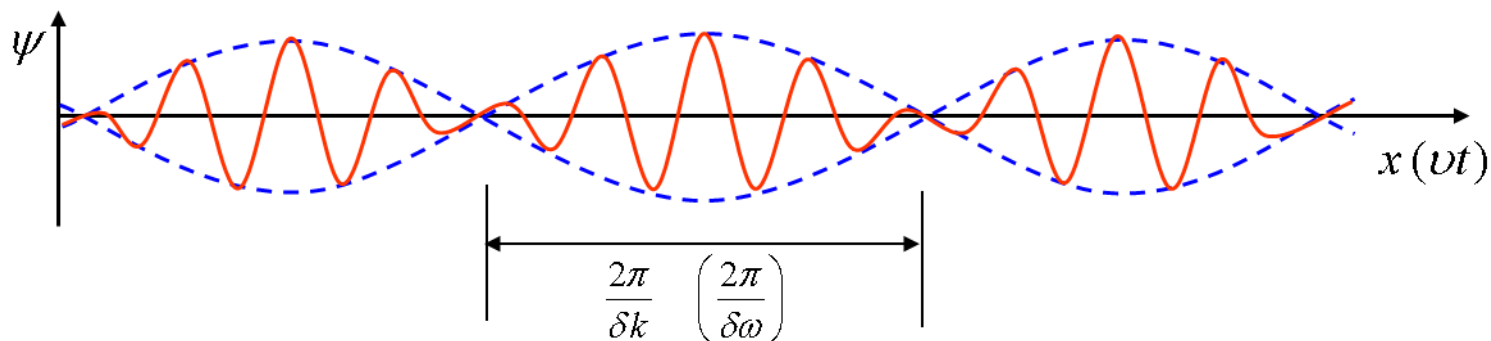
$$\bar{k} = k + \frac{\delta k}{2}$$

$$\bar{\omega} = \omega + \frac{\delta \omega}{2}$$

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) = \\ &= Ae^{i(kx - \omega t)} + Ae^{i[(k + \delta k)x - (\omega + \delta \omega)t]} \\ &= Ae^{-i(\bar{k}x - \bar{\omega}t)} \left[e^{\frac{i}{2}(\delta kx - \delta \omega t)} \right] \\ &= 2A \cos\left(\frac{\delta kx - \delta \omega t}{2}\right) e^{i(\bar{k}x - \bar{\omega}t)}\end{aligned}$$

$$\text{Re}[\psi(x, t)] = 2A \cos\left(\frac{\delta kx - \delta \omega t}{2}\right) \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$$

dudnienia, 2



$$\psi = 2A \cos\left(\frac{\delta kx - \delta\omega t}{2}\right) e^{i(\bar{k}x - \bar{\omega}t)}$$

prędkość pojedynczego „serdelka” = prędkość grupowa

$$\begin{aligned} \delta kx - \delta\omega t &= 0 \\ v_g &= \frac{x}{t} = \frac{\delta\omega}{\delta k} = \frac{d\omega}{dk} \end{aligned}$$

prędkość grupowa

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

dudnienia, 3

superpozycję wielu fal

$$\psi(x, t) = \int \tilde{A}(\omega) e^{i(kx - \omega t)} d\omega$$

zawsze możemy zapisać w postaci iloczynu
obwiedni i nośnej

$$\psi(x, t) = A(x, t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}$$

gdzie

$$A(x, t) = \int \tilde{A}(\omega) e^{i[(k - k_0)x - (\omega - \omega_0)t]} d\omega$$

rozwijamy $k(\omega)$ w szereg Taylora wokół ω_0 i

zachowujemy 2 pierwsze wyrazy

$$k(\omega) \cong k_0 + k'(\omega - \omega_0)$$

gdzie $k_0 = k(\omega_0)$ a $k' = \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0}$

i wstawiamy do ostatniej całki

$$A(x, t) \cong \int \tilde{A}(\omega) e^{i(k'x - t)(\omega - \omega_0)} d\omega$$

Po zamianie zmiennych $\omega' = \omega - \omega_0$ mamy

$$A(x, t) \cong \int \tilde{A}(\omega) e^{i(k'x - t)\omega'} d\omega' = f(k'x - t)$$

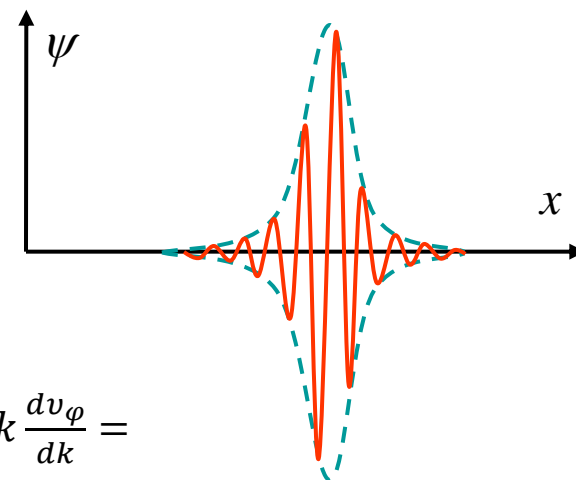
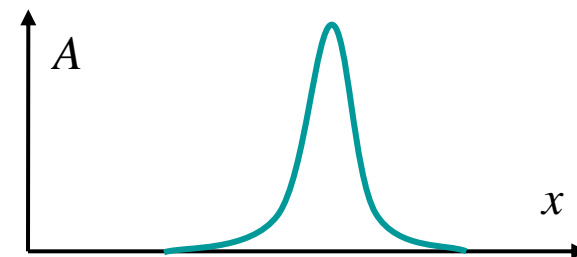
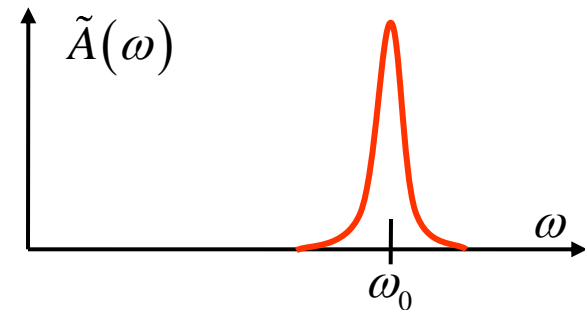
- wynik zależy wyłącznie od $k'x - t$ co znaczy, że
pakiet falowy nie zmienia kształtu i porusza się z
prędkością $1/k'$

prędkość grupowa

$$v_g = \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_A = \frac{(\partial A / \partial t)_x}{(\partial A / \partial x)_t} = \frac{1}{k'} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

ale $\omega = v_\phi k$ czyli

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{\partial \omega}{\partial k} = v_\phi + k \frac{dv_\phi}{dk} = \\ &= v_\phi - \lambda \frac{dv_\phi}{d\lambda} \end{aligned}$$



równanie falowe w 3 wymiarach

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi(x, y, z, t) = 0$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi(\vec{r}, t) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi(\vec{r}, t) = A \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = 0$$

Próbne rozwiązanie:

$$\psi(\vec{r}, t) = A e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon)}$$

$$|\vec{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$$

$$\vec{k} = [k_x, k_y, k_z], \vec{r} = [x, y, z], \vec{k} \cdot \vec{r} = [k_x x, k_y y, k_z z]$$

\vec{k} - **wektor falowy** o wymiarze 1/m

Wstawiamy próbne rozwiązanie do r-nia falowego

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi(\vec{r}, t) = A \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon)} = 0$$

i dostajemy **związek dyspersyjny**

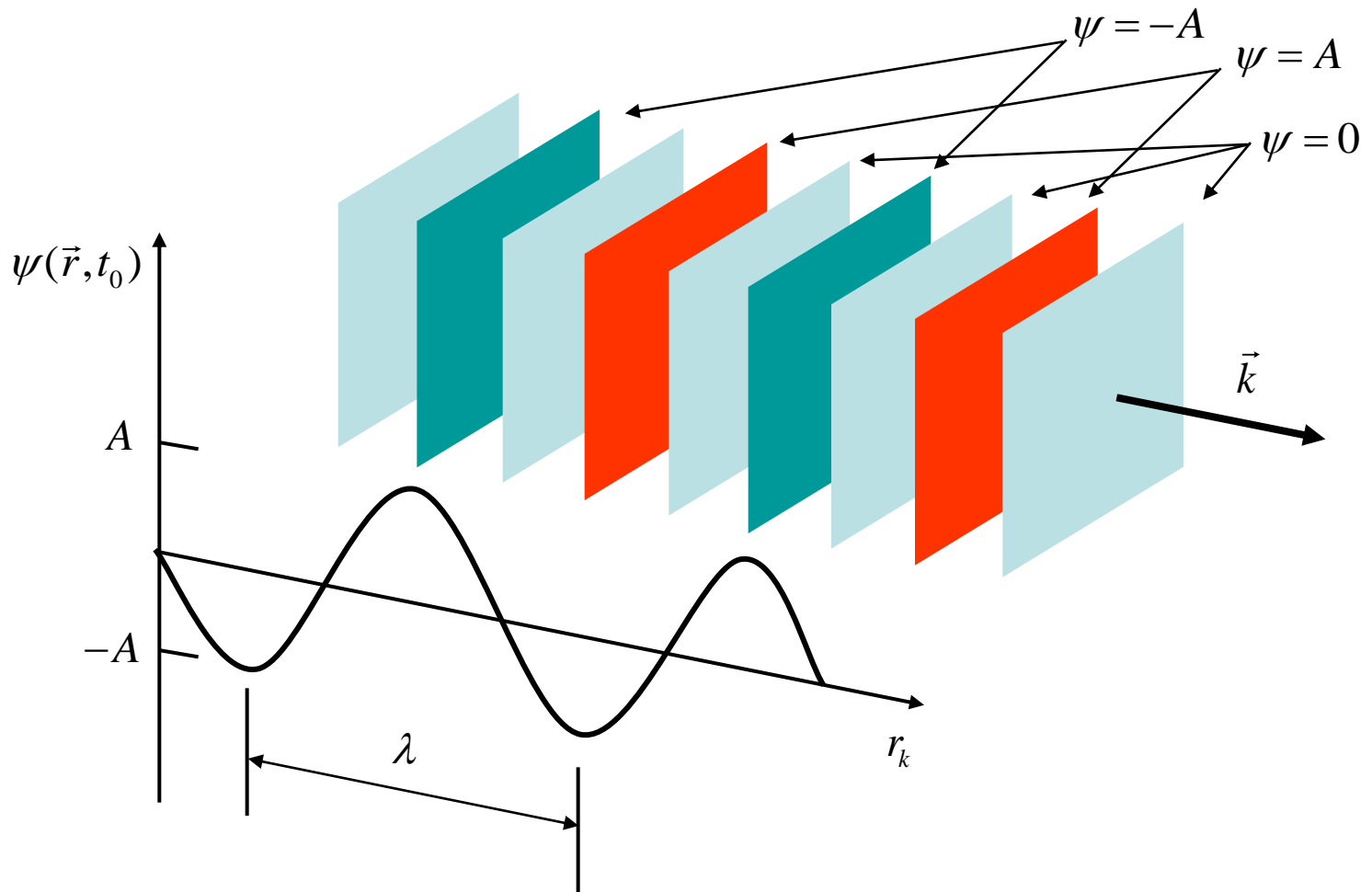
$$|\vec{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$$

płaska fala (monochromatyczna)

$$\psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon)}$$

Stała faza, powierzchnie stałej fazy – **fronty falowe**.

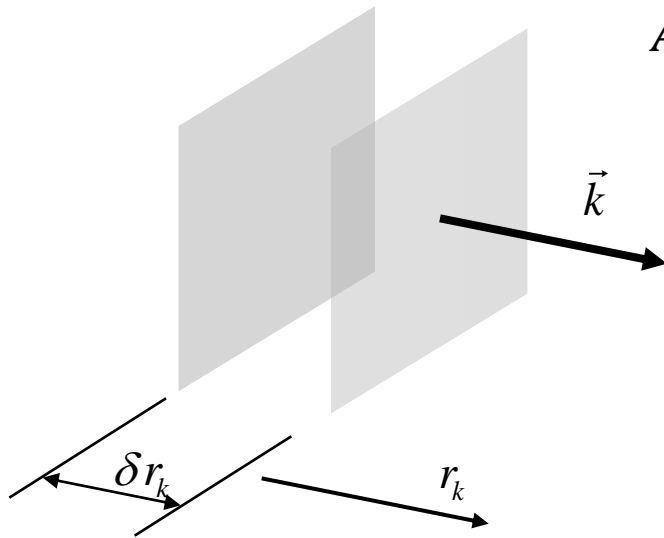
$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const} \Leftrightarrow \text{płaszczyzna prostopadła do } \vec{k}$$



prędkość fazowa fali płaskiej (monochromatycznej)

$$\psi(\vec{r}, t) = Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon)}$$

1. stała faza => stała amplituda



$$Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon)} = Ae^{i(kr_k - \omega t + \varepsilon)} = Ae^{i[k(r_k + \delta r_k) - \omega(t + \delta t)]}$$

$$k \cdot \delta r_k = \omega \cdot \delta t$$

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}$$

2. obrót układu odniesienia; oś x' równoległa do \vec{k}

$$\psi(\vec{r}, t) = Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon)} = Ae^{i(kx' - \omega t + \varepsilon)}$$

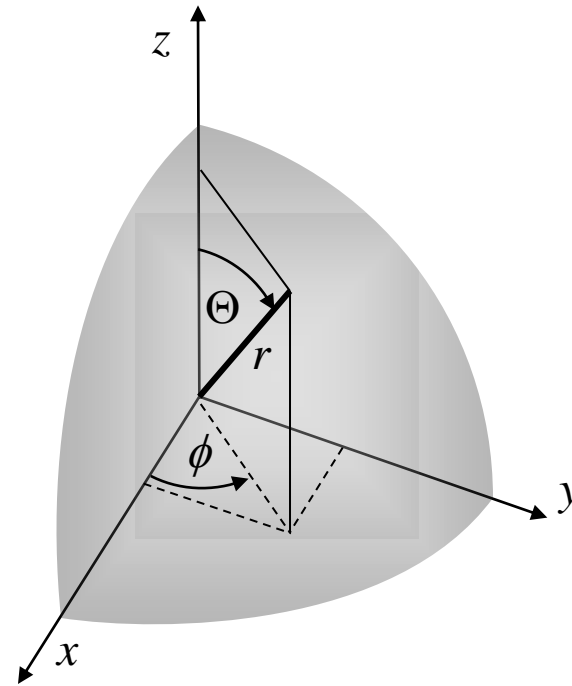
fala sferyczna

1. Sferyczny układ odniesienia

$$x = r \sin \Theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \Theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \Theta$$



2. Laplasjan w układzie sferycznym

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi)$$

3. Rozwiązania

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad \times r$$
$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial t^2} = 0$$

Sferyczna fala monochromatyczna, c.d.

4. Rozwiązania, c.d.

$$r\psi(r, t) = f(r \pm vt)$$

$$\psi(r, t) = \frac{f(r-vt)}{r} \quad \text{- fala rozbieżna}$$

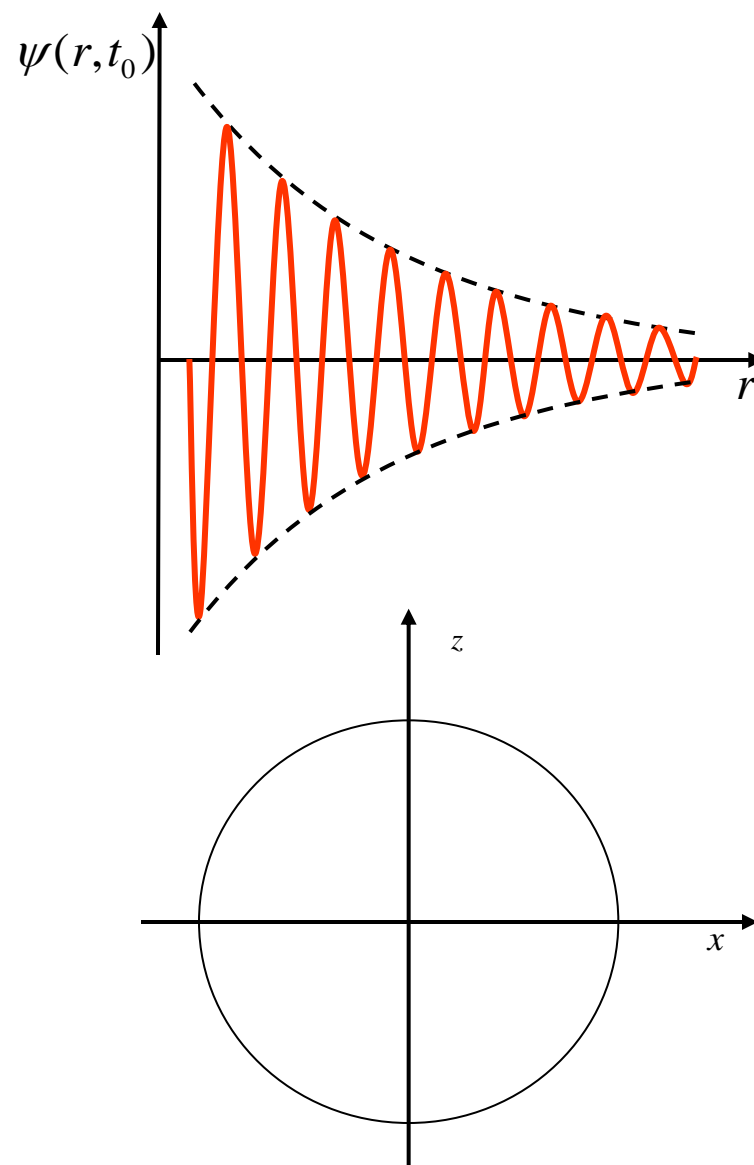
$$\psi(r, t) = \frac{f(r+vt)}{r} \quad \text{- fala zbieżna}$$

5. harmoniczna f.s.

$$\psi(r, t) = \frac{A}{r} \sin(kr - \omega t)$$

6. Fronty falowe f.s.

$$kr = \text{const} \quad \text{- sfery}$$



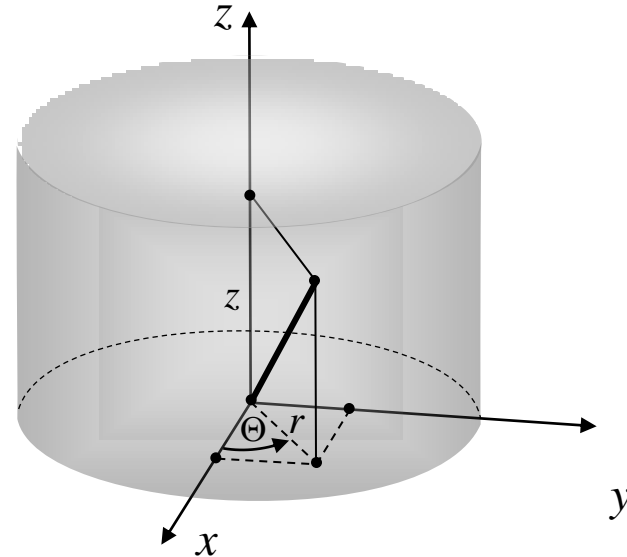
fala cylindryczna

1. Cylindryczny układ odniesienia

$$x = r \cos \Theta$$

$$y = r \sin \Theta$$

$$z = z$$



2. Laplasjan

$$\Delta\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

przybliżone rozwiązanie dla fali rozbieżnej

$$\psi(r, t) = \frac{A}{\sqrt{r}} e^{i(kr - vt + \varepsilon)}$$