Podstawy Fizyki IV
Optyka z elementami fizyki współczesnej

wykład 24, 25.05.2012

wykład:	Michał Karpiński
pokazy:	Radosław Chrapkiewicz, Filip Ozimek
ćwiczenia:	Ernest Grodner

Wykład 23 - przypomnienie

- argumenty za kwantową naturą światła
  - promieniowanie ciała doskonale czarnego
  - efekt foto-elektryczny
  - rozpraszanie Comptona
- własności fotonu: energia, pęd, spin
- foton vs rozkłady przestrzenno-czasowe pola
  - amplituda prawdopodobieństwa
  - prawdopodobieństwo
- statystyka Poissona
- doświadczenie Younga dla pojedynczych fotonów
- dodawanie amplitud prawdopodobieństwa
- bra-ket
- fala prawdopodobieństwa
- stany Focka (n-fotonowe) na płytce światłodzielącej

Stan koherentny

Prawdopodobieństwo zarejestrowania dokładnie n fotonów z modu przestrzennego α:

$P(n|\alpha) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{(\bar{n})^n e^{-n}}{n!}$

Amplituda prawdopodobieństwa:

$\langle n|\alpha\rangle = \frac{(\bar{n})^{n/2} e^{-n/2}}{\sqrt{n!}}$

$\langle n|\alpha\rangle = \big\langle n\big|\cdot\,|\alpha\big\rangle$

$\langle n|$ „ket” – stan układu (wektor)

$|\alpha\rangle$ „bra” – mierzona wielkość fizyczna obserwabla (kowektor)

Bardzo prosty przykład: stan o ustalonej liczbie fotonów, np. $\big|n = 3\rangle = |3\rangle$

$P(1|3) = |\langle 1|3\rangle|^2 = 0;\ P(1|3) = |\langle 3|3\rangle|^2 = 1$

generalnie

$P(m|n) = |\langle m|n\rangle|^2 = \delta_{mn} \ \Rightarrow \langle m|n\rangle = \delta_{mn}$

Stan koherentny

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\alpha\rangle|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{n})^{n/2} e^{-n/2}}{\sqrt{n!}}$$

Stan koherentny

Sprawdzenie – policzmy prawdopodobieństwo zarejestrowania dokładnie m fotonów z modu α:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\alpha\rangle |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{n})^{n/2} e^{-n/2}}{\sqrt{n!}}$$

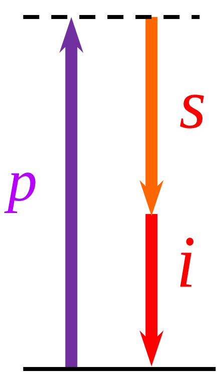
Stan o ustalonej liczbie fotonów n:

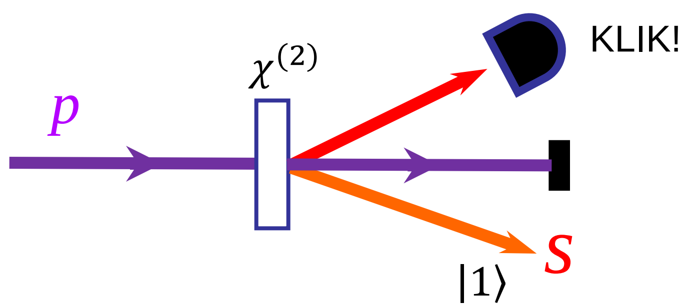
$P(m|n) = \langle m|n\rangle = 1 \Leftrightarrow m = n$

Roy Glauber, 1963; Nobel 2005

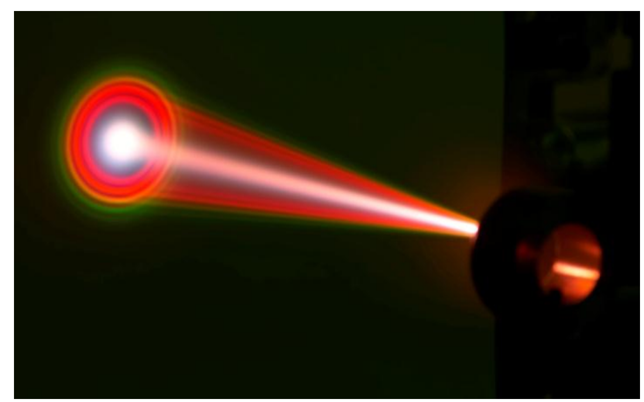
Jak wytworzyć taki stan?

Procesy nieliniowe: spontaniczna fluorescencja parametryczna (parametric downconversion).





Warunkowo!



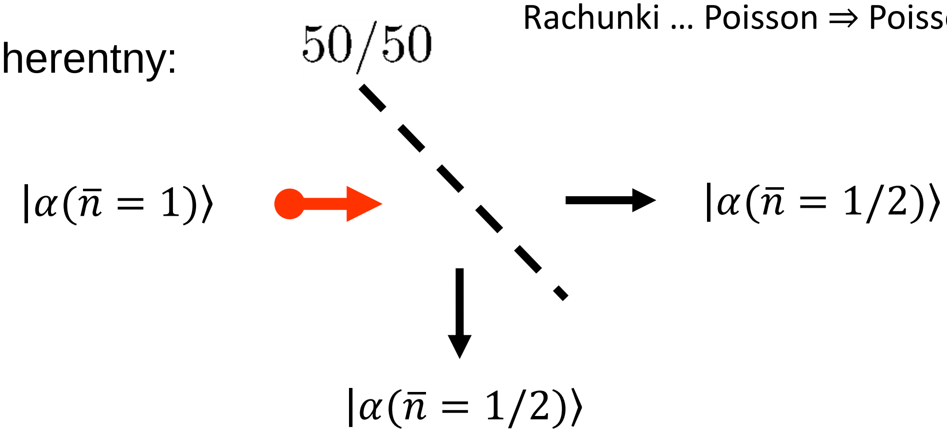
Inne metody: pułapkowane atomy, kropki kwantowe, defekty sieci krystalicznej diamentu…

Pojedyncze fotony i płytka światłodzieląca

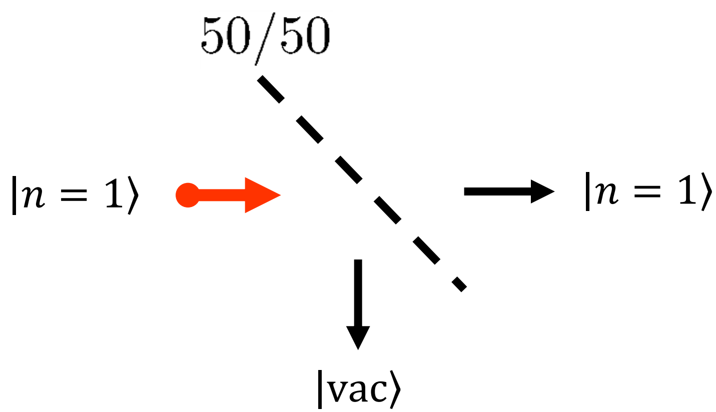
z wykładu 23: $p(m) = \sum_{m=n}^{\infty} \binom{n}{m} T^m (1-T)^{n-m} p_0(n)$

Rachunki … Poisson ⇒ Poisson

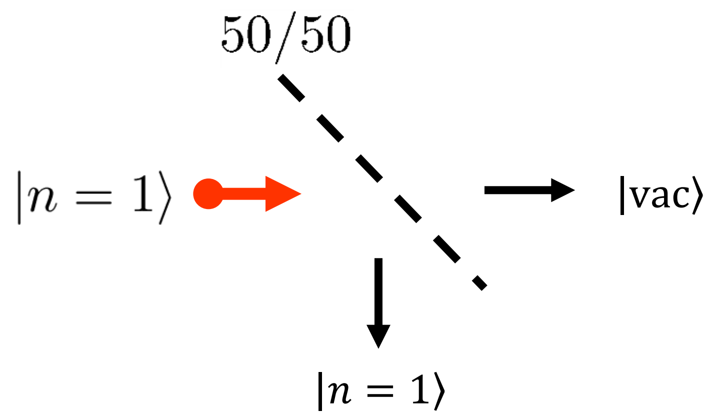
Stan koherentny:



Pojedynczy foton:

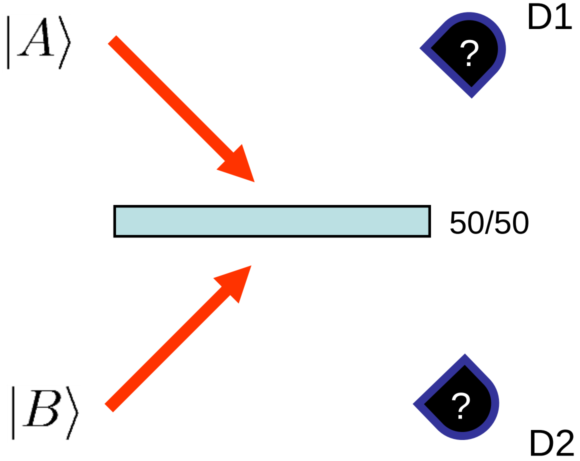


lub

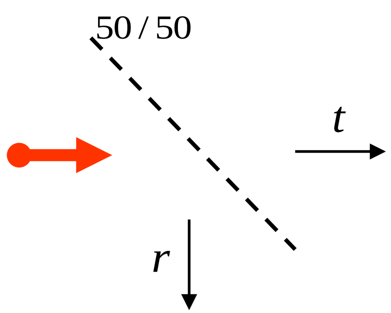


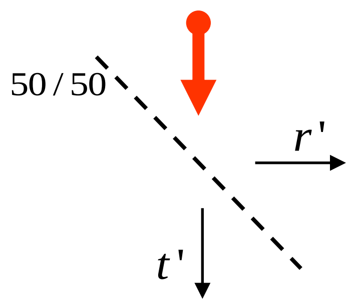
Generator liczb (prawdziwie) losowych – do kupienia od idQuantique.

Dwa fotony i płytka światłodzieląca



wykład 5: relacje Stokesa

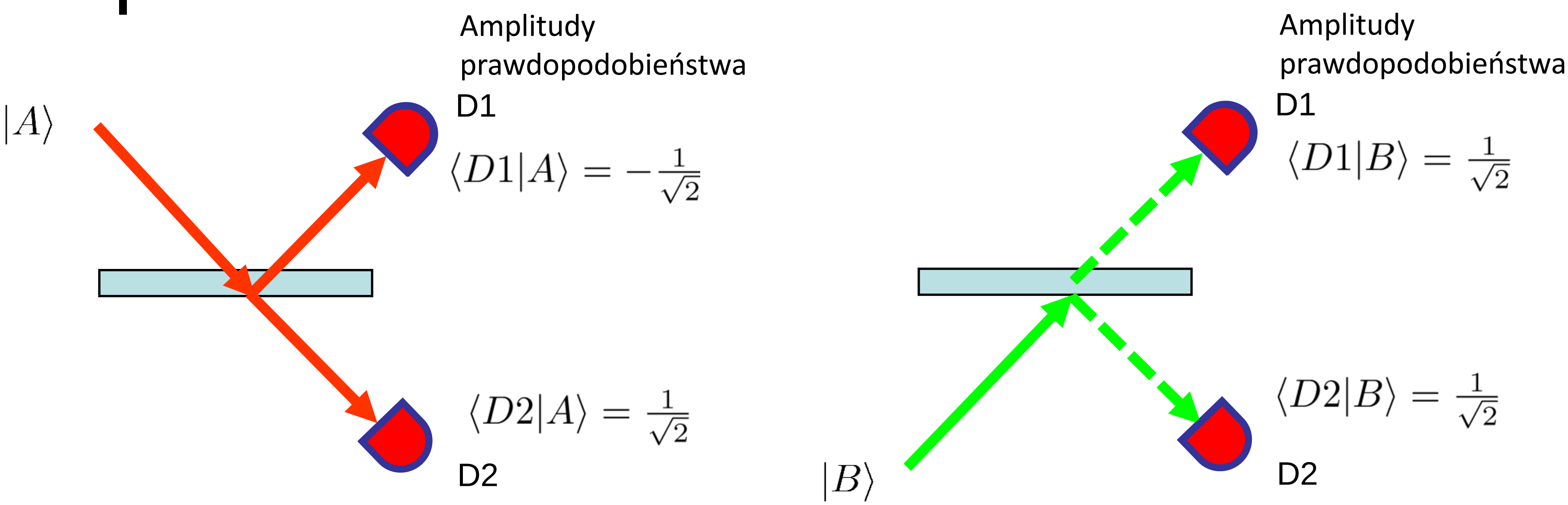




$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad r' = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad t' = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

jeden foton i płytka światłodzieląca



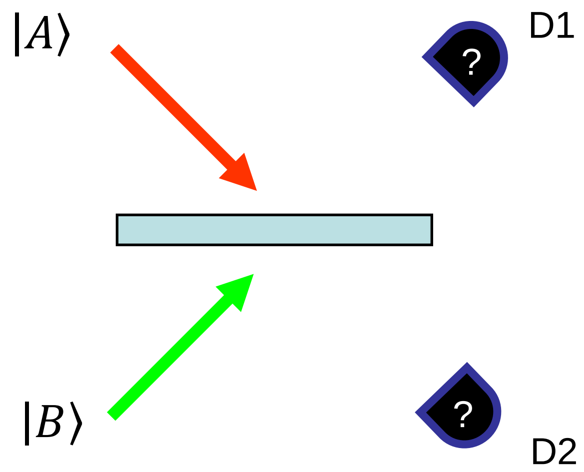
Działanie płytki na stan pojedynczego fotonu:

$$|A\rangle \rightarrow |A'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|A_1\rangle + |A_2\rangle)$$

$$|B\rangle \rightarrow |B'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|B_1\rangle + |B_2\rangle)$$

jeden foton i płytka światłodzieląca. c.d.

$$|A\rangle \to |A'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|A_1\rangle + |A_2\rangle)$$
$$|B\rangle \to |B'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|B_1\rangle + |B_2\rangle)$$



Porządny opis:

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ - foton w „górnym” modzie

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ - foton w „dolnym” modzie

Działanie płytki:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$$
$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$$

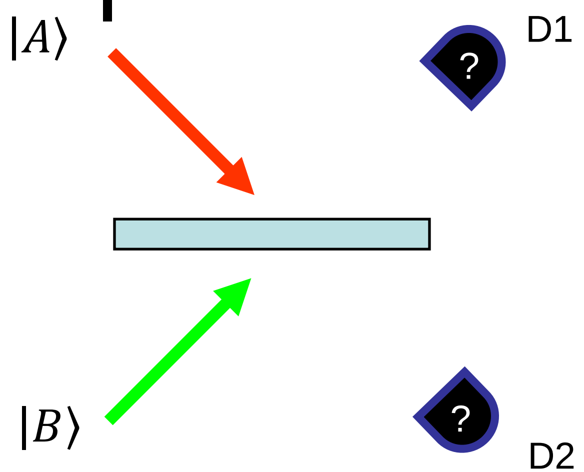
można opisać przy pomocy macierzy U

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

Macierz U jest unitarna: $U^\dagger U = 1$

† oznacza sprzężenie hermitowskie = transpozycja + sprzężenie zespolone

dwa fotony i płytka światłodzieląca



Reguła: dwie niezależne cząstki – mnożymy kety

$$|A\rangle|B\rangle \to |A'\rangle|B'\rangle = \frac{1}{2}(-|A_1\rangle + |A_2\rangle)(|B_1\rangle + |B_2\rangle)$$

$$|A'\rangle|B'\rangle = -\frac{1}{2}|A_1\rangle|B_1\rangle - \frac{1}{2}|A_1\rangle|B_2\rangle + \frac{1}{2}|A_2\rangle|B_1\rangle + \frac{1}{2}|A_2\rangle|B_2\rangle$$

Prawdopodobieństwa zdarzeń:

$$P[(A_1, B_1)|(A'B')] = |\langle A_1|\langle B_1|A'\rangle|B'\rangle|^2 = \frac{1}{4}$$

$$P[(A_2, B_2)|(A'B')] = |\langle A_2|\langle B_2|A'\rangle|B'\rangle|^2 = \frac{1}{4}$$

Prawdopodobieństwa liczb zliczeń zależą od ewentualnych relacji pomiędzy cząstkami.
Dla cząstek <u>rozróżnialnych</u> sumujemy prawdopodobieństwa:

$$P[(n_1 = 2, n_2 = 0)|(A', B')] = P[(A_1, B_1|(A', B'))] = \frac{1}{4}$$

$$P[(n_1 = 0, n_2 = 2)|(A', B')] = P[(A_2, B_2)|(A', B')] = \frac{1}{4}$$

$$P[(n_1 = 1, n_2 = 1)|(A', B')] =$$
$$P[(A_1, B_2)|(A', B')] + P[(A_2, B_1)|(A', B')] = \frac{1}{2}$$

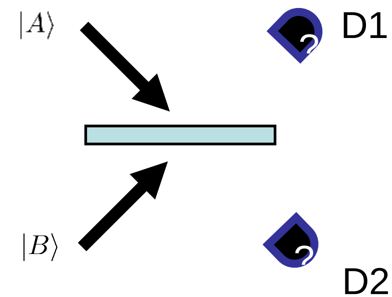
dwa fotony i płytka światłodzieląca. c.d.

Dla identycznych fotonów mamy: $|A\rangle = |B\rangle$ co daje

$$|A'\rangle|B'\rangle = |A'\rangle|A'\rangle =$$

$$-\frac{1}{2}|A_1\rangle|A_1\rangle - \frac{1}{2}|A_1\rangle|A_2\rangle + \frac{1}{2}|A_2\rangle|A_1\rangle + \frac{1}{2}|A_2\rangle|A_2\rangle =$$

$$-\frac{1}{2}|A_1\rangle|A_1\rangle + \frac{1}{2}|A_2\rangle|A_2\rangle$$



Renormalizacja

$\sum P_i = 1$ prowadzi do

$$|A'\rangle|A'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|A_1\rangle|A_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|A_2\rangle|A_2\rangle$$

oraz prawdopodobieństw

$$P[(n_1 = 2, n_2 = 0)|(A', A')] = P[(A_1, A_1|(A', A'))] = \frac{1}{4}$$

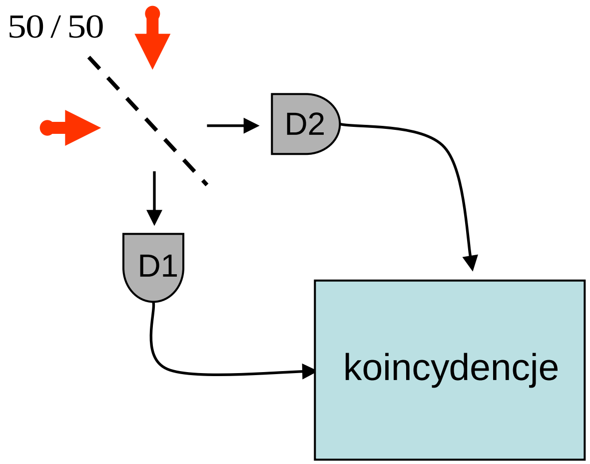
$$P[(n_1 = 0, n_2 = 2)|(A', A')] = P[(A_2, A_2)|(A', A')] = \frac{1}{4}$$

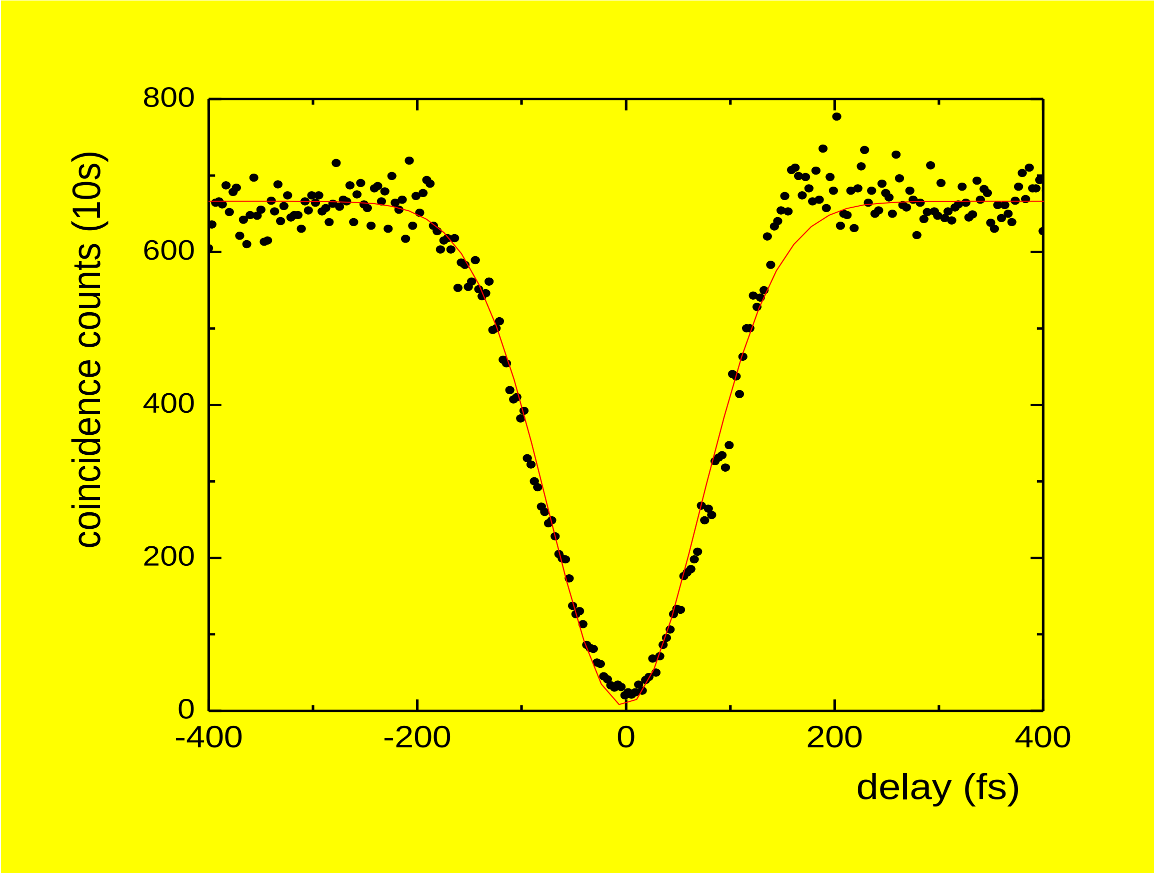
$$P[(n_1 = 1, n_2 = 1)|(A', A')] = 0$$

$$|\updownarrow\rangle\ |\updownarrow\rangle$$

2 identyczne fotony na płytce, wyniki

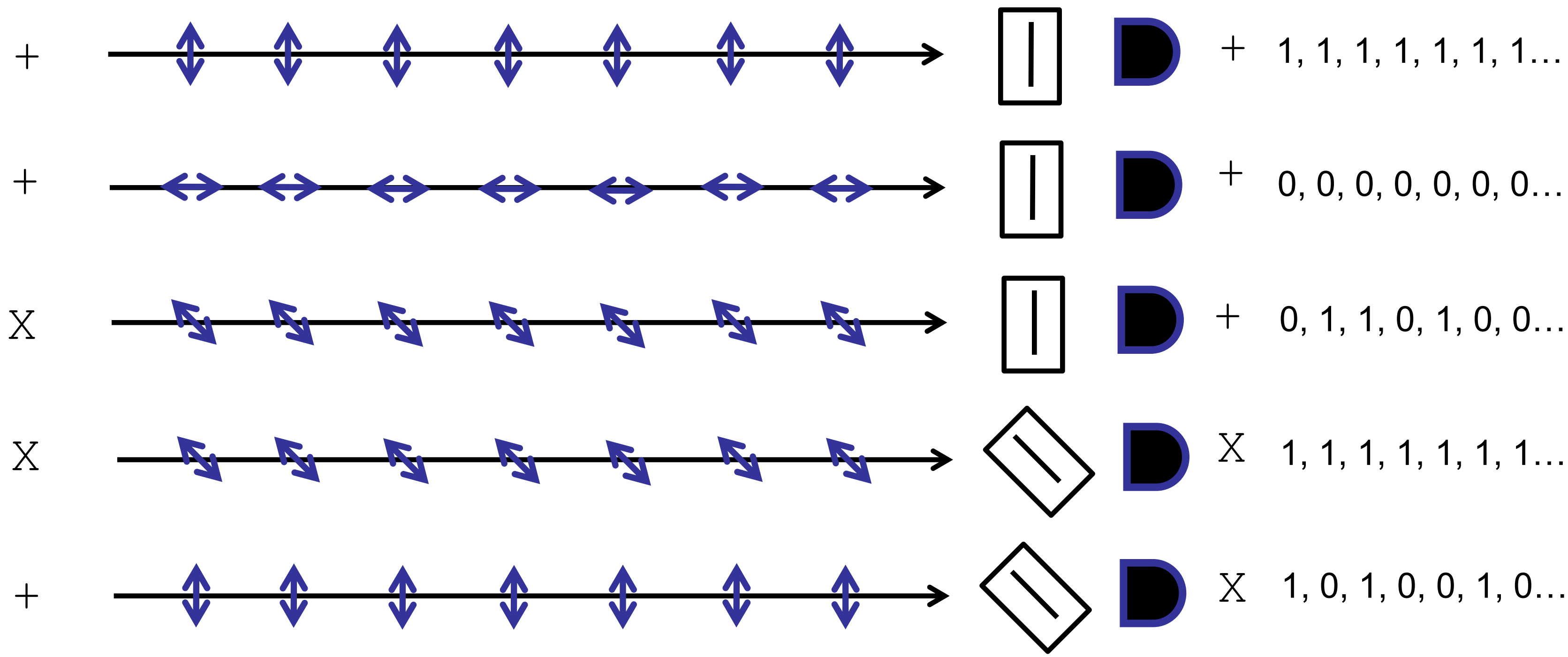
Interferencja Hong-Ou-Mandla:
C. K. Hong, Z. Y. Ou, L. Mandel, 1987





zmierzone w KL FAMO, Toruń

Bazy



Bazy:

$|\updownarrow\rangle\,,\ |\leftrightarrow\rangle$ $\quad +$

$|\nearrow\rangle\,,\ |\nwarrow\rangle$ $\quad \mathrm{X}$

Bazy

Baza: $|\updownarrow\rangle\,,\ \ |\leftrightarrow\rangle \qquad +$

$$|\nearrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\updownarrow\rangle + |\leftrightarrow\rangle\right)$$

$$|\nwarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\updownarrow\rangle - |\leftrightarrow\rangle\right)$$

Prawdopodobieństwa wyników pomiarów w bazie **+** dla różnych stanów wejściowych:

$$P(\updownarrow \mid \updownarrow) = |\langle \updownarrow \mid \updownarrow \rangle|^2 = 1,\ \ P(\updownarrow \mid \leftrightarrow) = |\langle \updownarrow \mid \updownarrow \rangle|^2 = 0$$

$$P(\updownarrow \mid \nearrow) = \left|\langle \updownarrow| \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\updownarrow\rangle + |\leftrightarrow\rangle\right)\right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P(\leftrightarrow \mid \nearrow) = \left|\langle \leftrightarrow| \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\updownarrow\rangle + |\leftrightarrow\rangle\right)\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Druga baza: $|\nearrow\rangle\,,\ \ |\nwarrow\rangle \qquad \mathrm{X}$

$$|\updownarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\nearrow\rangle + |\nwarrow\rangle\right)$$

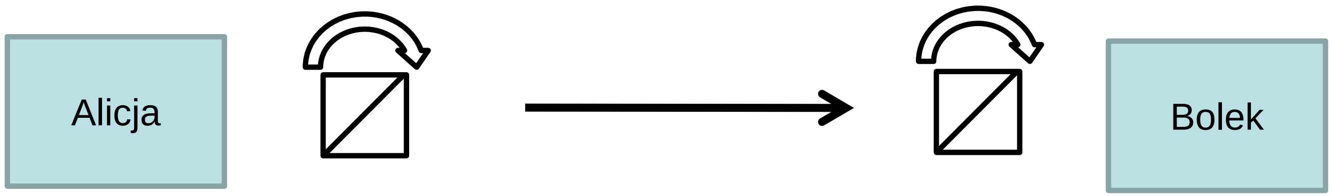
$$|\leftrightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\nearrow\rangle - |\nwarrow\rangle\right)$$

$$P(\nearrow \mid \nearrow) = 1,\ \ P(\nearrow \mid \nwarrow) = 0$$

$$P(\nearrow \mid \leftrightarrow) = \tfrac{1}{2},\ \ P(\nearrow \mid \updownarrow) = \tfrac{1}{2}$$

Dla pojedynczego fotonu niemożliwe jest rozróżnienie nieortogonalnych polaryzacji. Fotony spolaryzowane ortogonalnie możemy odróżnić tylko wtedy gdy znamy bazę, w której należy dokonać pomiaru.

Kryptografia kwantowa



A losowo wysyła fotony spolaryzowane w bazie X lub + (wybór baz losowy 50/50), B losuje swoją bazę i dokonuje pomiaru.

A:	X	+	X	X	+	+	+	X	+	+	X	X	+	X	...
	/	–	\	/	|	–	–	\	–	|	/	\	–	/	...
B:	+	+	X	+	X	+	X	X	X	+	+	X	+	+	...
	|	–	\	–	/	–	\	\	\	|	–	\	–	|	...
		0	1			0		1		1		1	0		

Po zakończeniu A i B publicznie porównują bazy i odrzucają pomiary, dla których bazy były niezgodne.

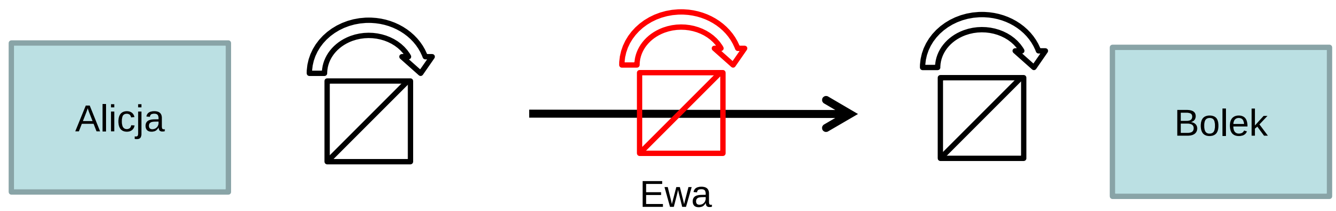
Stany polaryzacji –> wartości logiczne:

–, / ≡ 0

|, \ ≡ 1

A i B uzyskują sekretny ciąg uzgodnionych bitów.

Kryptografia kwantowa - podsłuch



<table>
<tr><td>A:</td><td>X</td><td>+</td><td>X</td><td>X</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>X</td><td>+</td><td>+</td><td>X</td><td>X</td><td>+</td><td>X</td></tr>
<tr><td></td><td>/</td><td>-</td><td>\</td><td>/</td><td>|</td><td>-</td><td>-</td><td>\</td><td>-</td><td>|</td><td>/</td><td>\</td><td>-</td><td>/</td></tr>
<tr><td>E:</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td></td><td>/</td><td>\</td><td>\</td><td>/</td><td>\</td><td>\</td><td>\</td><td>\</td><td>/</td><td>/</td><td>/</td><td>\</td><td>\</td><td>/</td></tr>
<tr><td>B:</td><td>+</td><td>+</td><td>X</td><td>+</td><td>X</td><td>+</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>+</td><td>+</td><td>X</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td></td><td>|</td><td>|</td><td>\</td><td>-</td><td>\</td><td>-</td><td>\</td><td>\</td><td>/</td><td>|</td><td>-</td><td>\</td><td>|</td><td>|</td></tr>
<tr><td>A:</td><td></td><td>0</td><td>1</td><td></td><td></td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>1</td><td></td><td>1</td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>B:</td><td></td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>1</td><td></td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr>
</table>

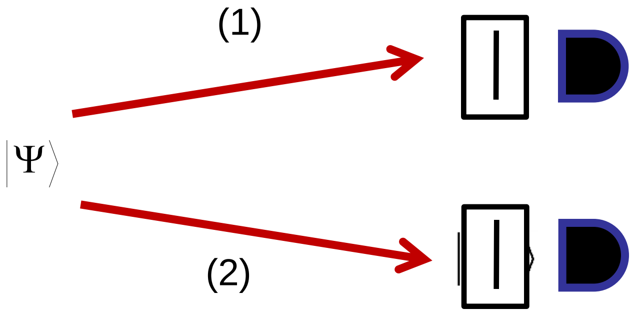
Protokół BB84
Bennett, Brassard 1984

1. Nie można wziąć „pół fotonu"
2. Pojedyncze fotony: zakaz klonowania!

Kwestia podsłuchu: aby podsłuchać, należy dokonać pomiaru na fotonie podróżującym A -> B nie mając informacji o bazie, której należy użyć – 50% szansy na użycie właściwej.
Pomiar rzutuje stan fotonu na bazę użytą podczas próby podsłuchu.

Wykrycie podsłuchu: A i B ujawniają część uzgodnionych bitów i szukają niezgodności. Dla 1 sprawdzanego bitu prawdopodobieństwo, że A i B nie zauważą podsłuchu wynosi ¾: prawdopodobieństwo, że E odgadła dobrą bazę (½) + prawdopodobieństwo, że pomimo użycia złej bazy bity pozostały zgodne (½·½ = ¼). Dla k sprawdzanych bitów, prawdopodobieństwo niezauważenia podsłuchu wynosi $(¾)^k$, np. $P = 10^{-13}$ dla $k = 100$, $P = 10^{-125}$ dla $k = 1000$.

Stany splątane



$$|\updownarrow_1\rangle|\leftrightarrow_2\rangle \equiv |\updownarrow\leftrightarrow\rangle$$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\updownarrow\leftrightarrow\rangle - |\leftrightarrow\updownarrow\rangle\right)$$

Osobno:

$$P(\updownarrow_1|\Psi) = P(\updownarrow_1\updownarrow_2|\Psi) + P(\updownarrow_1\leftrightarrow_2|\Psi) = \left|\langle\updownarrow\updownarrow|\Psi\rangle\right|^2 + \left|\langle\updownarrow\leftrightarrow|\Psi\rangle\right|^2 = 0 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

$$P(\leftrightarrow_1|\Psi) = P(\leftrightarrow_1\updownarrow_2|\Psi) + P(\leftrightarrow_1\leftrightarrow_2|\Psi) = \left|\langle\leftrightarrow\updownarrow|\Psi\rangle\right|^2 + \left|\langle\leftrightarrow\leftrightarrow|\Psi\rangle\right|^2 = \tfrac{1}{2} + 0 = \tfrac{1}{2}$$

Analogicznie dla drugiego fotonu oraz w innych bazach: pojedyncze fotony z pary są niespolaryzowane!

Korelacje:

$$P(\updownarrow_1\updownarrow_2|\Psi) = \left|\langle\updownarrow\updownarrow|\Psi\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\langle\updownarrow\updownarrow|\left(|\updownarrow\leftrightarrow\rangle - |\leftrightarrow\updownarrow\rangle\right)\right|^2 = 0$$

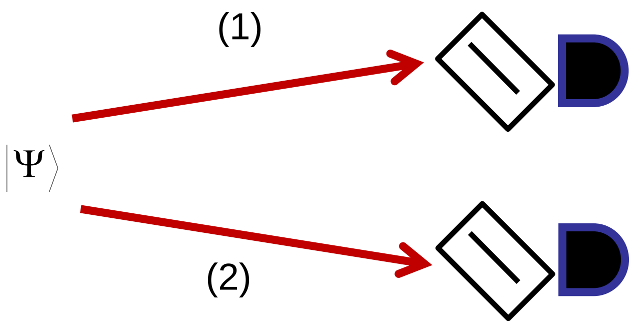
$$P(\updownarrow_1\leftrightarrow_2|\Psi) = \left|\langle\updownarrow\leftrightarrow|\Psi\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\langle\updownarrow\leftrightarrow|\left(|\updownarrow\leftrightarrow\rangle - |\leftrightarrow\updownarrow\rangle\right)\right|^2 = \tfrac{1}{2}$$

Zawsze ortogonalne!

$$P(\leftrightarrow_1\updownarrow_2|\Psi) = \left|\langle\leftrightarrow\updownarrow|\Psi\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\langle\leftrightarrow\updownarrow|\left(|\updownarrow\leftrightarrow\rangle - |\leftrightarrow\updownarrow\rangle\right)\right|^2 = \tfrac{1}{2}$$

$$P(\leftrightarrow_1\leftrightarrow_2|\Psi) = \left|\langle\leftrightarrow\leftrightarrow|\Psi\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\langle\leftrightarrow\leftrightarrow|\left(|\updownarrow\leftrightarrow\rangle - |\leftrightarrow\updownarrow\rangle\right)\right|^2 = 0$$

Stany splątane – korelacje



$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\updownarrow\leftrightarrow\rangle - |\leftrightarrow\updownarrow\rangle\right)$$

Korelacje w obróconej bazie – klasycznie spodziewamy się ½ przypadków zgodnych polaryzacji, ½ ortogonalnych.

Szukamy następujących prawdopodobieństw:

$$P(\nearrow_1\nearrow_2|\Psi),\ P(\nearrow_1\nwarrow_2|\Psi), P(\nwarrow_1\nearrow_2|\Psi),\ P(\nwarrow_1\nwarrow_2|\Psi)$$

$$\boxed{\begin{aligned}|\updownarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\nearrow\rangle + |\nwarrow\rangle\right)\\ |\leftrightarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\nearrow\rangle - |\nwarrow\rangle\right)\end{aligned}}$$

Zapiszmy stan Ψ w bazie X:

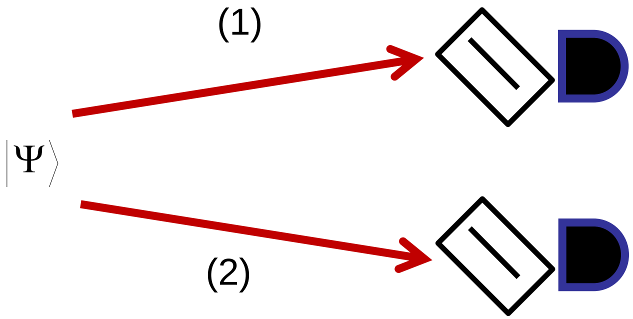
$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\updownarrow\leftrightarrow\rangle - |\leftrightarrow\updownarrow\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\nearrow\rangle + |\nwarrow\rangle\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\nearrow\rangle - |\nwarrow\rangle\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\nearrow\rangle - |\nwarrow\rangle\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\nearrow\rangle + |\nwarrow\rangle\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cancel{|\nearrow\nearrow\rangle} - |\nearrow\nwarrow\rangle + |\nwarrow\nearrow\rangle - \cancel{|\nwarrow\nwarrow\rangle} - \cancel{|\nearrow\nearrow\rangle} - |\nearrow\nwarrow\rangle + |\nwarrow\nearrow\rangle + \cancel{|\nwarrow\nwarrow\rangle}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\nwarrow\nearrow\rangle - |\nearrow\nwarrow\rangle\right)$$

Stany splątane – korelacje



$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\text{⤡}\text{⤢}\rangle - |\text{⤢}\text{⤡}\rangle\right)$$

Prawdopodobieństwa:

$$P(\text{⤢}_1\text{⤢}_2\,|\Psi) = |\langle\text{⤢}\text{⤢}\,|\Psi\rangle|^2 = \left|\langle\text{⤢}\text{⤢}|\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\text{⤡}\text{⤢}\rangle - |\text{⤢}\text{⤡}\rangle\right)\right|^2 = 0$$

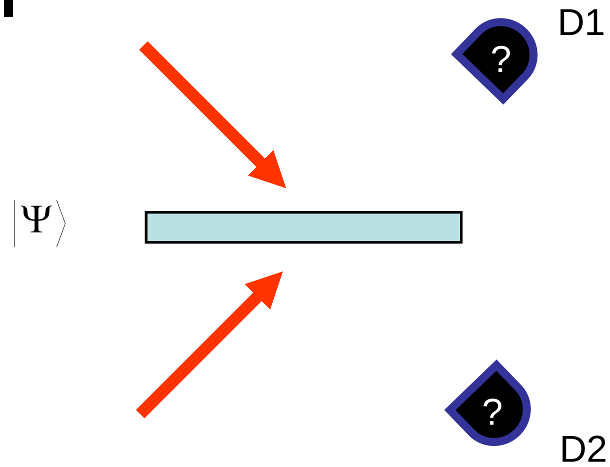
$$P(\text{⤢}_1\text{⤡}_2\,|\Psi) = |\langle\text{⤢}\text{⤢}\,|\Psi\rangle|^2 = \left|\langle\text{⤢}\text{⤡}|\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\text{⤡}\text{⤢}\rangle - |\text{⤢}\text{⤡}\rangle\right)\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Analogicznie:

$$P(\text{⤡}_1\text{⤢}_2\,|\Psi) = \frac{1}{2},\ P(\text{⤡}_1\text{⤡}_2\,|\Psi) = 0$$

Zawsze ortogonalne – pełna korelacja!

Stany splątany i płytka światłodzieląca



$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\updownarrow_1 \leftrightarrow_2\rangle - |\leftrightarrow_1 \updownarrow_2\rangle\right)$$

Działanie płytki:

$$|\updownarrow_1\rangle \to \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-|\updownarrow'_1\rangle + |\updownarrow'_2\rangle\right)$$

$$|\leftrightarrow_1\rangle \to \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-|\leftrightarrow'_1\rangle + |\leftrightarrow'_2\rangle\right)$$

$$|\updownarrow_2\rangle \to \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|\updownarrow'_1\rangle + |\updownarrow'_2\rangle\right)$$

$$|\leftrightarrow_2\rangle \to \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|\leftrightarrow'_1\rangle + |\leftrightarrow'_2\rangle\right)$$

$$|\Psi\rangle \to |\Psi'\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(-|\updownarrow'_1\rangle + |\updownarrow'_2\rangle\right)\left(|\leftrightarrow'_1\rangle + |\leftrightarrow'_2\rangle\right) - \left(-|\leftrightarrow'_1\rangle + |\leftrightarrow'_2\rangle\right)\left(|\updownarrow'_1\rangle + |\updownarrow'_2\rangle\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cancel{-|\updownarrow'_1 \leftrightarrow'_1\rangle} - |\updownarrow'_1 \leftrightarrow'_2\rangle + |\leftrightarrow'_1 \updownarrow'_2\rangle + \cancel{|\updownarrow'_2 \leftrightarrow'_2\rangle} + \cancel{|\updownarrow'_1 \leftrightarrow'_1\rangle} + |\leftrightarrow'_1 \updownarrow'_2\rangle - |\updownarrow'_1 \leftrightarrow'_2\rangle - \cancel{|\updownarrow'_2 \leftrightarrow'_2\rangle}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\leftrightarrow'_1 \updownarrow'_2\rangle - |\updownarrow'_1 \leftrightarrow'_2\rangle\right)$$

Zawsze osobno!