Podstawy Fizyki IV
Optyka z elementami fizyki współczesnej

wykład 25, 26.05.2012

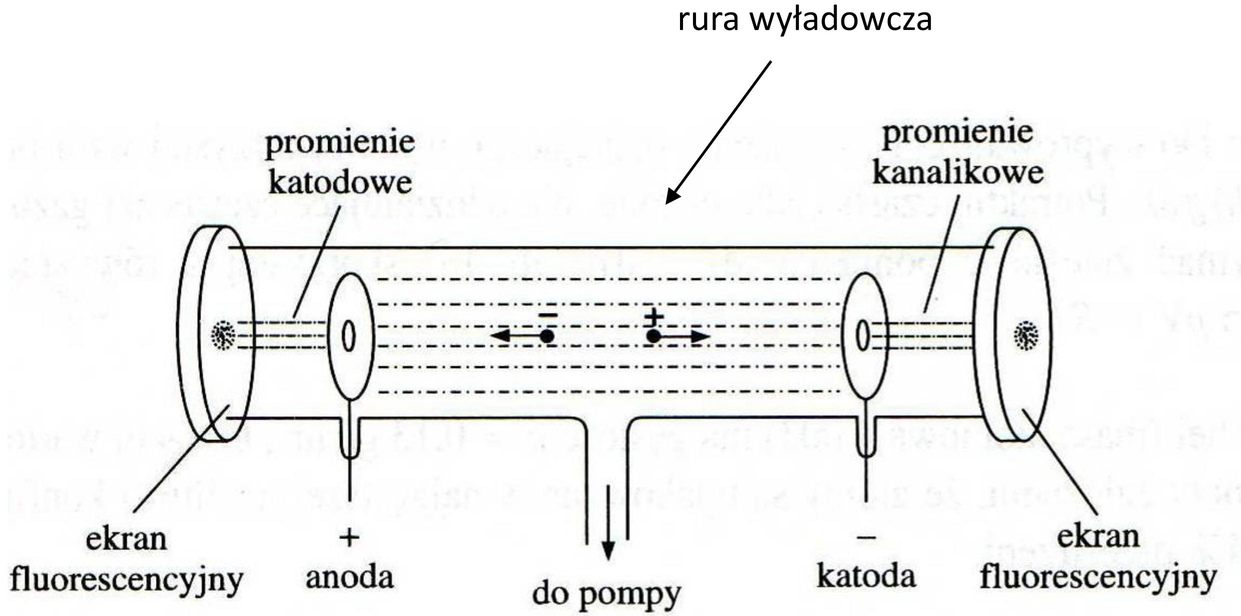
wykład:	Czesław Radzewicz
pokazy:	Radosław Chrapkiewicz, Filip Ozimek
ćwiczenia:	Ernest Grodner

Wykład 24 - przypomnienie

- stan koherentny
- stan koherentny vs pojedyncze fotony na płytce światłodzielącej
- 2 fotony na płytce światłodzielącej
- 2 identyczne fotony na płytce światłodzielącej
  doświadczenie Hong-Ou-Mandela
- polaryzacja fotonu w różnych nieortogonalnych bazach
- kryptografia kwantowa
- stany splątane, przykład 2 fotony splątane w polaryzacji
- korelacje kwantowe
- stany splątane na płytce światłodzielącej

XIX wiek: promienie katodowe i anodowe

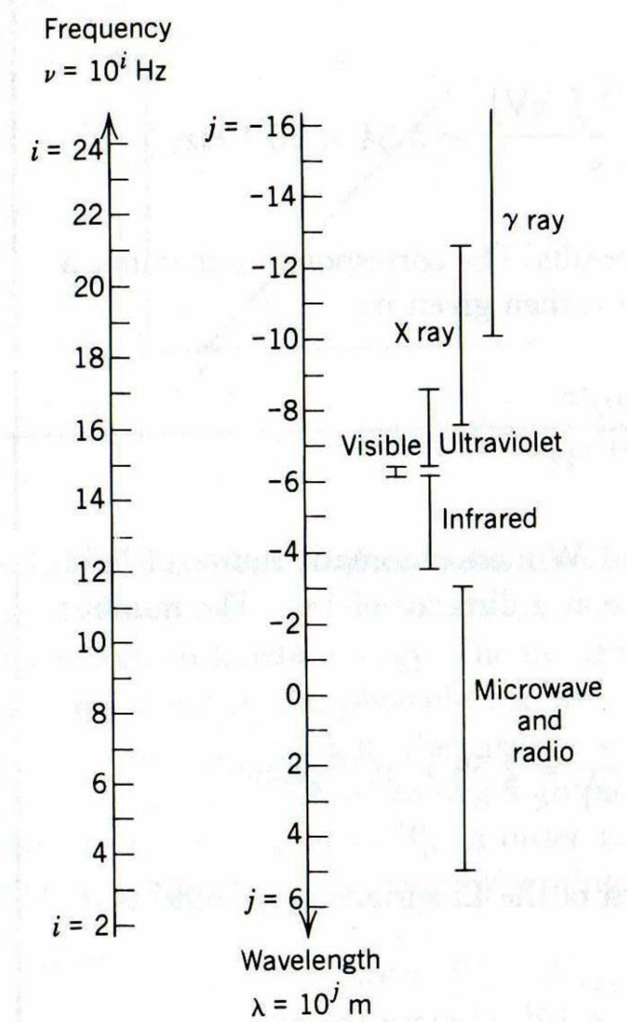
1859 Plücker, rurki wyładowcze, promienie katodowe
1886 Goldstein, promienie kanalikowe

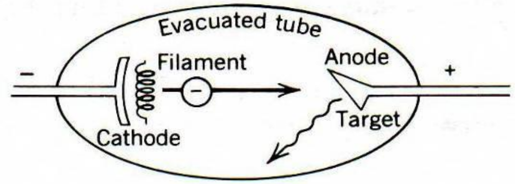


promienie katodowe = elektrony (1897, Thompson)
promienie kanalikowe = dodatnie jony atomowe (1900, Wien)

Promieniowanie X, 1

1985 W.K.Roentgen
1912 M. Laue





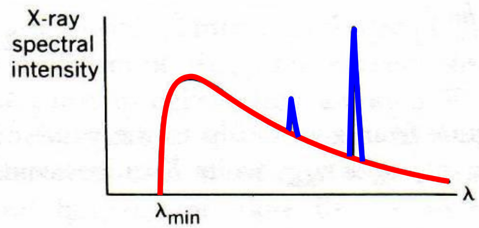
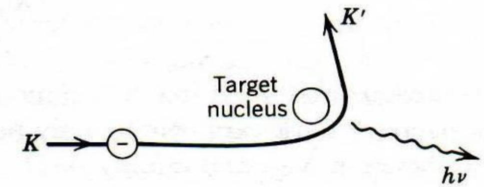


Figure 2-17
Bremsstrahlung process for an electron entering the field of an atomic nucleus.



promieniowanie hamowania
$e \rightarrow e + \gamma$

energia kin. elektr. przed zderzeniem

energia kin. elektr. po zderzeniu

$$h\nu = K - K'$$

$$K' = 0 \quad \Rightarrow \quad h\nu_{max} = K = eU$$

napięcie na lampie

$$h\nu_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}} = eU$$

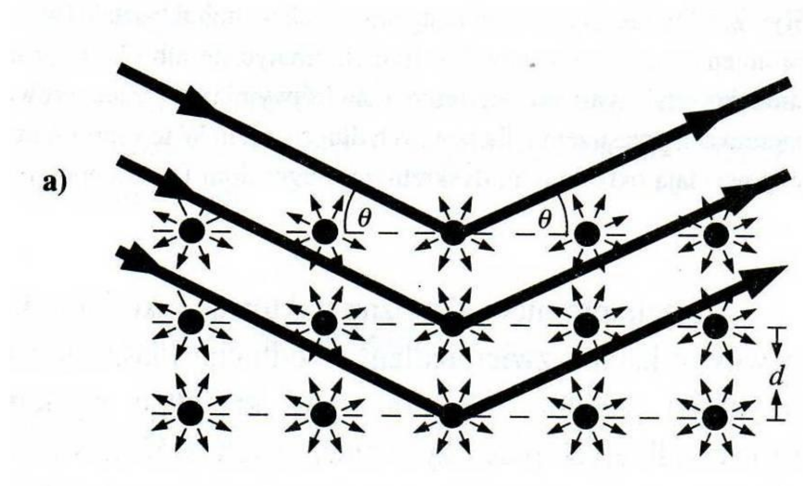
$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eU}$$

$$\lambda_{min} = \frac{1.240\, kV \cdot nm}{U}$$

promieniowanie charakterystyczne – przejścia pomiędzy poziomami energetycznymi atomów katody

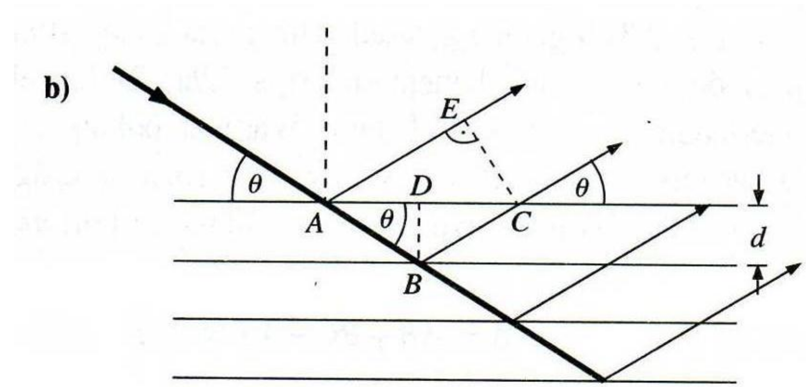
Promieniowanie X, 2

Ugięcie Bragga (na monokrysztale)
(analogie: wykład 13, siatka dyfrakcyjna;
wykład 20, modulator akusto-optyczny)



$$\Delta = AB + BC - AE = 2AB - AE = \frac{2d}{\sin\Theta} - 2AD\cos\Theta$$

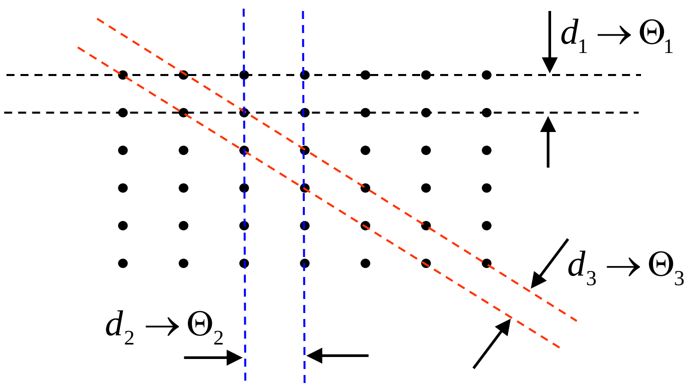
$$AD = \frac{d}{\tan\Theta} \Rightarrow \Delta = 2d\sin\Theta = n\lambda$$

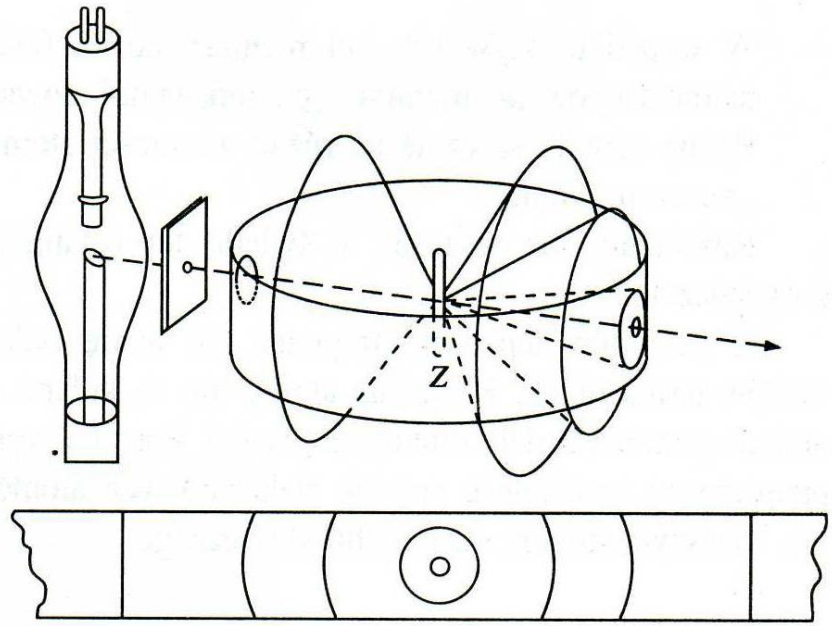


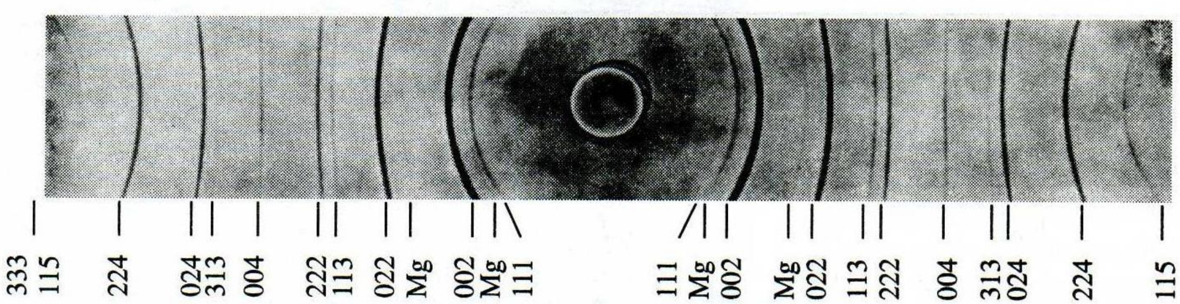
Promieniowanie X, 3

Metoda Debye'a-Scherrera
(metoda proszkowa)

$$2d\sin\Theta = n\lambda$$







Hipoteza de Broglie'a

1924 L. de Broglie

Oczekujemy symetrii: jeśli fale elektromagnetyczne są cząstkami to cząstki powinny być falami

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

Dla swobodnej cząstki o energii $E = \hbar\omega$ mamy: $\Psi(z,t) = e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda}z - \omega t\right)}$.
Podobnie jak dla fotonu z płaskiej fali monochromatycznej (wykład 23) dokładnie znamy energię i pęd cząstki ale kompletnie nieokreślone jest jej położenie oraz własności czasowe.

Jeśli chcemy zdefiniować położenie oraz czas potrzebujemy pakiety falowe w przestrzeni (np. wiązka gaussowka) i czasie (np. impuls gaussowski).Obowiązuje zasada nieoznaczoności Hesienberga

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

gdzie Δx oraz Δp_x należy rozumieć jako wariancje położenia i pędu. Podobna nierówność obowiązuje dla czasu i energii:

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

Liczby:

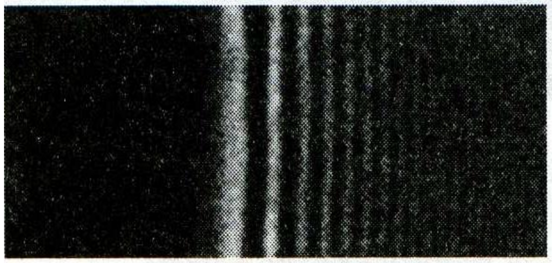
1. elektron, energia 100 eV $\quad p = \sqrt{2m_e E} \cong 5.4 \times 10^{-24}\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \lambda = h/p \cong 0.12\mathrm{nm}$

2. atom sodu, T=10^{-8}K $\quad E = kT \cong 0.7 \times 10^{-31} J,\ p = \sqrt{mkT} \cong 5 \times 10^{-29}\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \lambda = h/p \cong 0.12\mathrm{\mu m}$

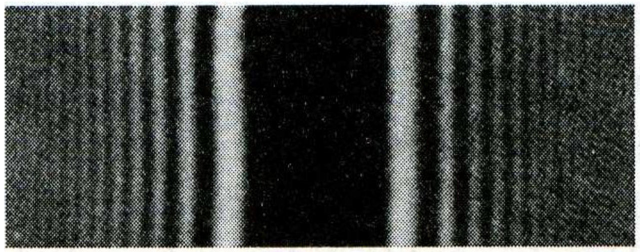
3. kulka, 1g , 100m/s $\quad \lambda = h/(Mv) \cong 6.3 \times 10^{-33}\mathrm{m}$

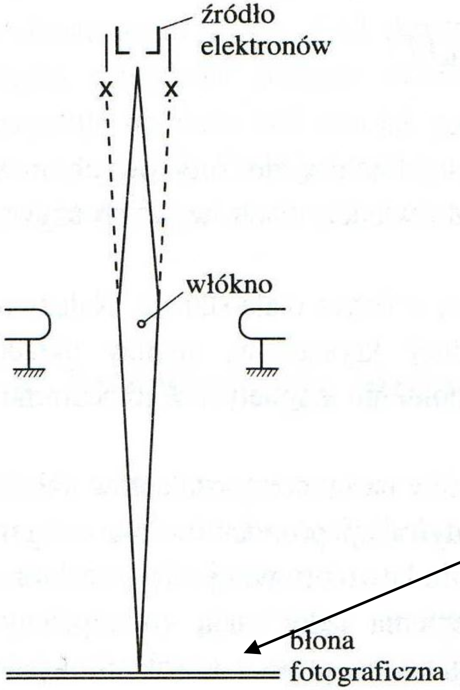
dyfrakcja i interferencja elektronów

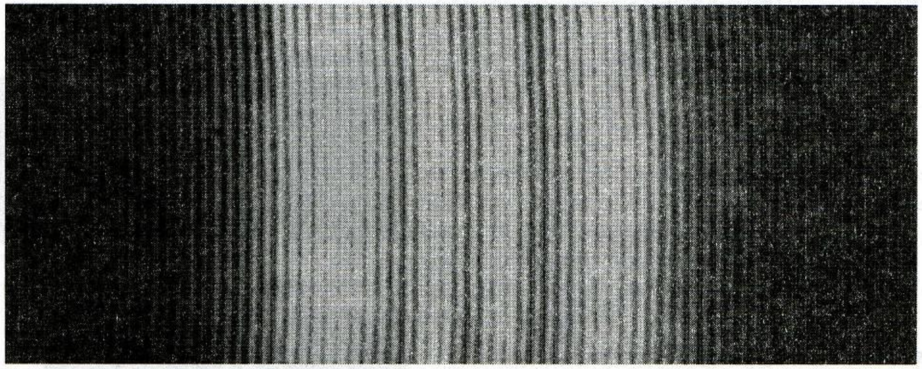
Dyfrakcja na krawędzi
$E = 3 \times 10^4 \mathrm{eV}, \qquad \lambda = 5 \times 10^{-12} \mathrm{m}$



Dyfrakcja na drucie 2 μm
$E = 1.9 \times 10^4 \mathrm{eV}$

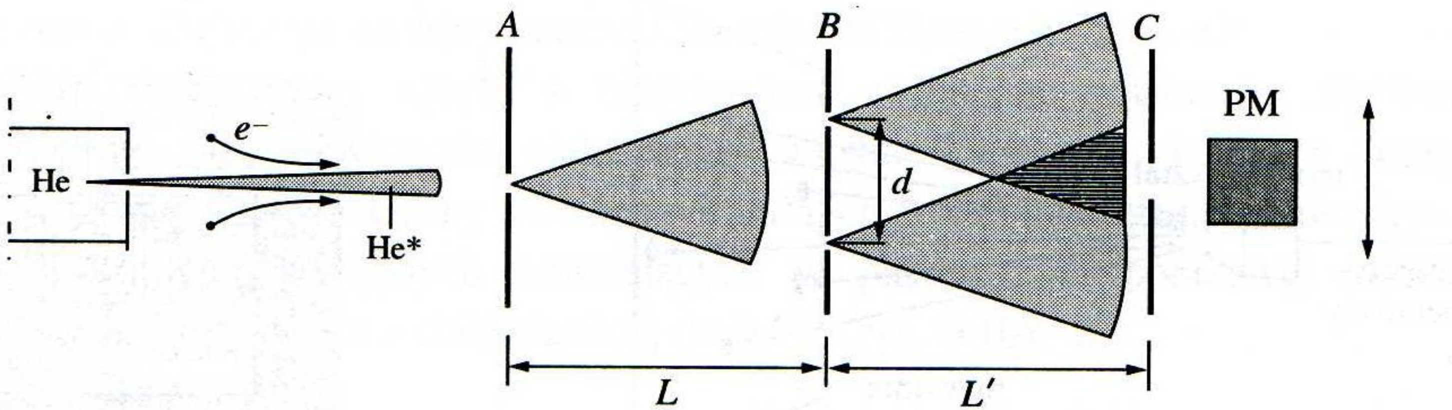


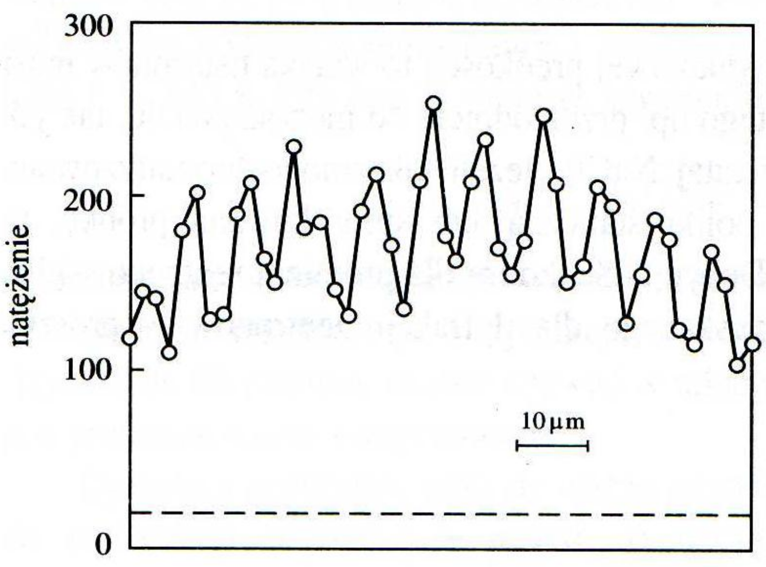




włókno ma dodatni potencjał

Interferencja atomów





He – dysza wytwarzająca strugę helu
A – szczelina 2 μm
B – 2 szczeliny 1 μm odległe o 8μm
PM - fotopowielacz

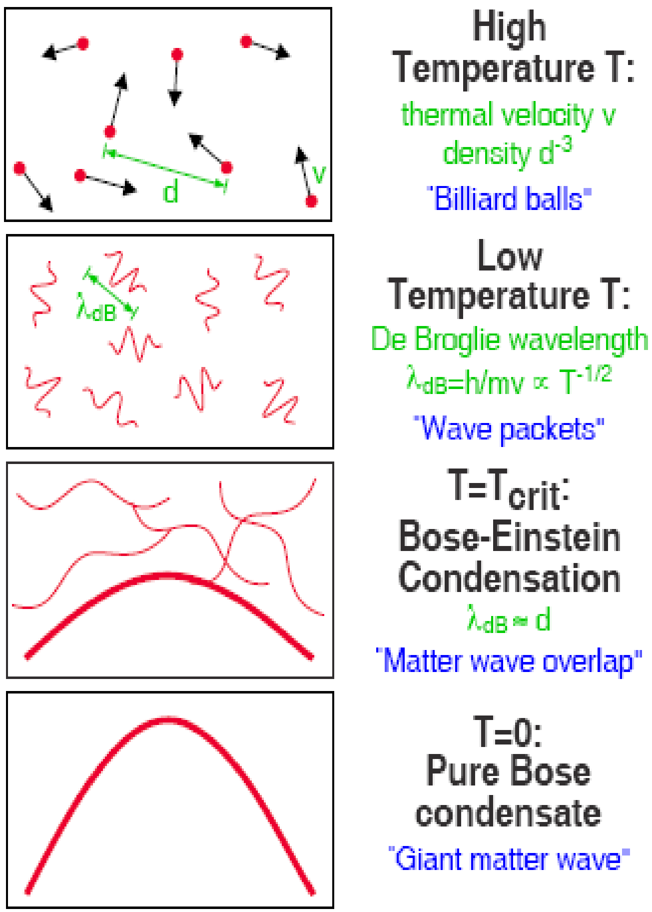
O. Carnal, J. Mlynek, PRL **66**, 2689 (1991)

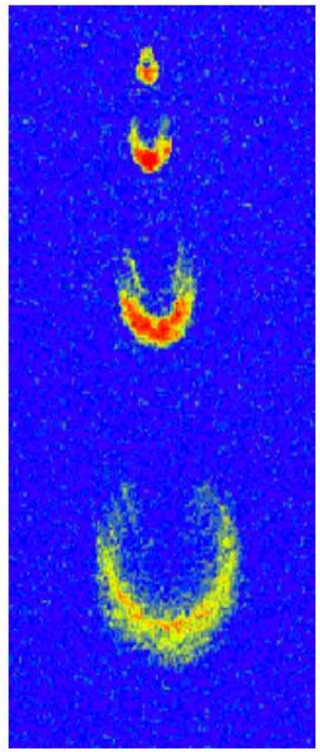
Physical
Review
Letters

BEC - fale materii

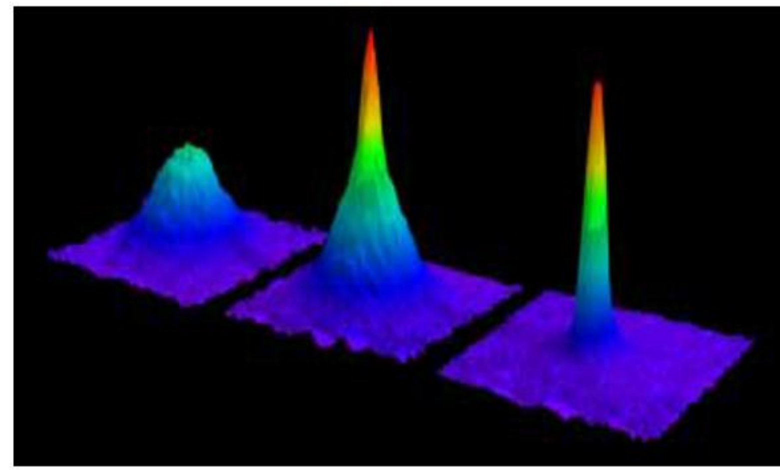
Kondensat Bosego-Einsteina (ang. Bose – Einstein Condensate BEC)

$$\lambda = 12\mu m \quad \Leftrightarrow \quad \rho \approx 6\times10^{8} cm^{-3}$$



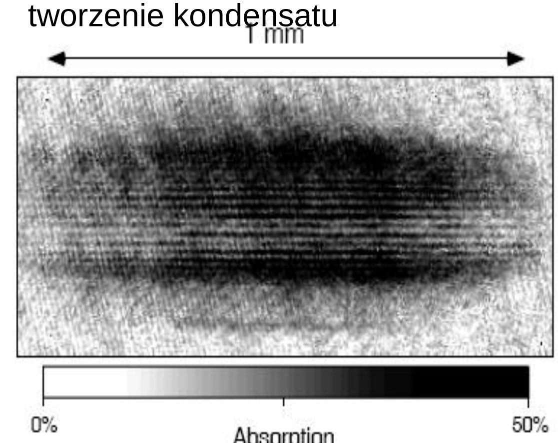


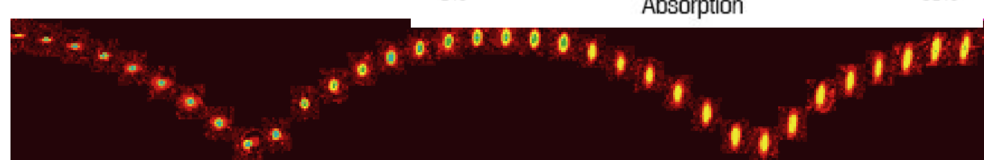
„laser” atomowy



tworzenie kondensatu

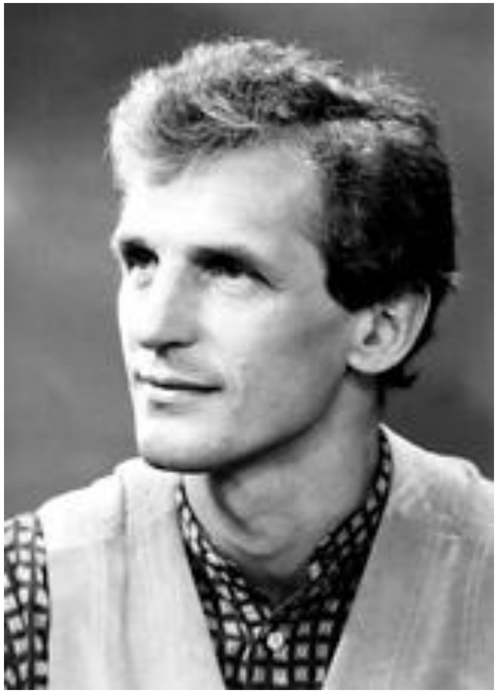
interferencja 2 kondensatów





BEC - fale materii

Eric A. Cornell



Wolfgang Ketterle

Carl E. Wieman

The Nobel Prize in Physics 2001 was awarded jointly to Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle and Carl E. Wieman *"for the achievement of Bose-Einstein condensation in dilute gases of alkali atoms, and for early fundamental studies of the properties of the condensates"*.

konsekwencje lokalizacji cząstki

przykład: elektron w atomie

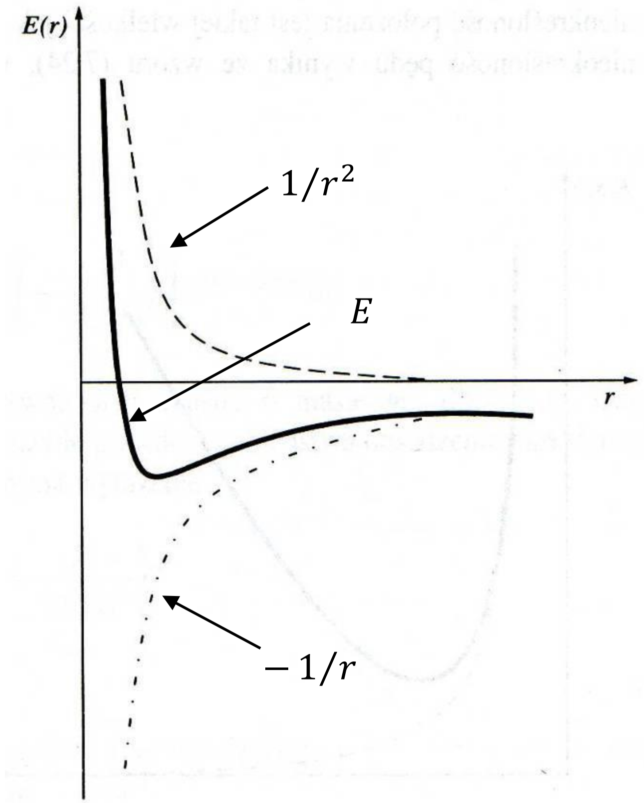
$$E = E_{kin} + E_{pot}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Załóżmy, że elektron krąży po orbicie o promieniu r. Lokalizacja elektronu skutkuje rozmyciem jego pędu – pęd nie może być mały. Z zasady nieoznaczoności Heisenberga mamy: $\Delta p \geq \hbar/2\Delta x = \hbar/r$

Przyjmijmy: $p = \hbar/r$
wtedy:

$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$



szukamy minimum energii:

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0$$

skąd

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}$$

oraz

$$E_{min} = -\frac{1}{2}\frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2}$$

Równanie Schrodingera, 1

1926 E. Schrodinger, cząstce przypisujemy zespoloną funkcję (funkcję falową) $\Psi(z,t)$

Postulaty:

długość fali de Broglie'a

częstość fali de Broglie'a

1. Spełnione są równania : $\lambda = \frac{h}{p}, \quad \nu = E/h$
2. Energia cząstki: $E = p^2/2m + V$
3. Równanie musi być liniowe w Ψ - możliwa interferencja
4. Dla $V =$ const dostajemy funkcję falową swobodnej cząstki $\Psi_{sw}(z,t) = e^{i(\omega t - kz)}$

---

oznaczenia: $k = 2\pi/\lambda, \omega = 2\pi\nu$ wstawiamy do r-nia na energię i dostajemy

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(z,t) = \hbar\omega$$

Postulat 3 dopuszcza tylko funkcję Ψ oraz jej pochodne. Stąd równanie próbne

$$\alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + V(z,t)\Psi = \beta \frac{d\Psi}{dt}$$

Postulat 4:

$$\frac{\partial^2 \Psi_{sw}}{\partial z^2} = -k^2 \Psi_{sw}, \qquad \frac{\partial \Psi_{sw}}{\partial z} = i\omega \Psi_{sw}$$

co daje

$$(-\alpha k^2 + V) = i\omega\beta\Psi_{sw}$$

Równanie Schrodingera, 2

$$\Psi_{sw}(z,t) = e^{i(\omega t - kz)}$$

$$(-\alpha k^2 + V) = i\omega\beta\Psi_{sw}$$

Porównując ostatnie r-nie z

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(z,t) = \hbar\omega$$

dostajemy

$$\alpha = -\hbar^2/2m$$
$$\beta = \hbar/i$$

Ostatecznie,1D r-nie Scrodingera to

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + V(z,t)\Psi = i\hbar\frac{d\Psi}{dt}$$

Uwaga: powyższe rozumowanie wcale nie dowodzi poprawności r-nia Schrodingera. Znaleźliśmy jedynie takie r-nie różniczkowe, które spełnia postulaty 1-4.
O poprawności r-nia Schrodingera wnioskujemy na podstawie zgodności jego przewidywań z doświadczeniem

Interpretacja funkcji falowej, 1

według M. Borna   Rozważamy zagadnienie 1-D: $\Psi(z,t)$

Funkcja falowa $\Psi(z,t)$ kompletnie opisuje układ fizyczny – nie możemy mieć więcej informacji o układzie

gęstość prawdopodobieństwa $P(z,t) = |\Psi(z,t)|^2$

interferencja $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2, |\Psi|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + 2\mathrm{Re}(\Psi_1 {\Psi_2}^*)$

normalizacja f.f. $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(z,t)|^2 dz = 1$

prąd prawdopodobieństwa $\frac{\partial}{\partial t}(\Psi\Psi^*) = \cdots = -\frac{\partial}{\partial z}\underbrace{\left[\frac{\hbar}{2im}\left(\Psi^*\frac{d\Psi}{dz} - \frac{d\Psi^*}{dz}\Psi\right)\right]}$

$$\frac{\partial}{\partial t}P(z,t) + \frac{\partial}{\partial z}j(z,t) = 0$$

prąd prawdopodobieństwa

zachowanie prawdopodobieństwa $\int_{z_1}^{z_2} P(z,t)dz = \cdots = j(z_1,t) - j(z_2,t)$

Oczekujemy, że prąd prawdopodobieństwa będzie różniczkowalną funkcją zmiennych przestrzennych. Stąd wynika ciągłość funkcji falowej i jej pochodnych.

Interpretacja funkcji falowej, 2

Stany stacjonarne

Nadal rozważamy zagadnienie 1-D: $\Psi(z,t)$

Potencjał nie zależy o czasu. Załóżmy, że da się rozdzielić zmienne $\Psi(z,t) = \psi(z)f(t)$
Wstawiamy do r-nia Schrodingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}f + V(z)\psi f = i\hbar\psi\frac{df}{dt}$$

skąd mamy

$$\frac{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + V\psi}{\psi} = \frac{i\hbar\frac{df}{dt}}{f}$$

Obie strony równania muszą być stałą. Nazwijmy ją E

dostajemy 2 równania:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + V\psi = E\psi$$

$$i\hbar\frac{df}{dt} = Ef$$

Potrafimy rozwiązać 2. r-nie:

$$f(t) = e^{-iEt/\hbar} = e^{-i\omega t}$$

Porównując z funkcją falową swobodnej cząstki widzimy, że $E = \hbar\omega$ to energia cząstki

Ostatecznie:

$$\Psi(z,t) = \psi(z)e^{-iEt/\hbar}$$

$$|\Psi(z,t)|^2 = |\psi(z)|^2$$ ← gęstość prawd. nie zależy od czasu – stan stacjonarny o zadanej energii

Od rozwiązań stacjonarnych do dynamiki

założmy, że (dla danego układu) potrafimy znaleźć stany stacjonarne oraz opowiadające im energie $\psi_n(z), E_n$ gdzie n oznacza indeks bądź zbiór indeksów (niekoniecznie dyskretnych)
Wtedy wiemy, że:

$$\Psi_n(z,t) = \psi_n\,(z)e^{-iE_n t/\hbar}$$

Mechanika kwantowa dopuszcza superpozycje.
Rozważmy najprostszą z nich:

$$\Psi(z,t) = a_1\psi_1(z)e^{-iE_1 t/\hbar} + a_2\psi_2(z)e^{-iE_2 t/\hbar}$$

i policzmy gęstość prawdopodobieństwa

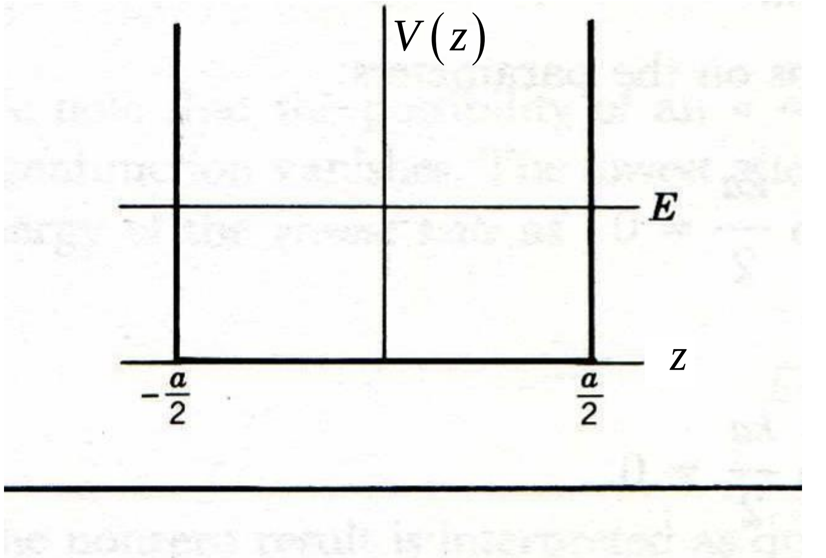
$$|\Psi(z,t)|^2 = \left(a_1\psi_1(z)e^{-iE_1 t/\hbar} + a_2\psi_2(z)e^{-iE_2 t/\hbar}\right)\left({a_1}^*{\psi_1}^*(z)e^{iE_1 t/\hbar} + {a_2}^*{\psi_2}^*(z)e^{iE_2 t/\hbar}\right) =$$
$$= |a_1\psi_1(z)|^2 + {a_1}^* a_2 {\psi_1}^*(z)\psi_2(z)e^{i(E_1-E_2)t/\hbar} + {a_2}^* a_1 {\psi_2}^*(z)\psi_1(z)e^{-i(E_1-E_2)t/\hbar} + |a_2\psi_2(z)|^2$$

dudnienia z częstością $\omega = \frac{E_2-E_1}{\hbar}$

nieskończona studnia 1-D, 1

Cząstka o masie m zamknięta w jednowymiarowym pudełku. Długość pudełka: a

$$V(z) = \begin{cases} 0 \text{ dla } -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \\ \infty \text{ dla } |z| \geq \frac{a}{2} \end{cases}$$



Dla $|z| \geq \frac{a}{2}$ mamy $\psi(z) = 0$

W obszarze $-\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}$ trzeba znaleźć rozwiązanie r-nia Schrodingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dz^2} = E\psi$$

czyli

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + k^2\psi = 0$$

gdzie $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

Rozwiązania to

$$\psi(z) = A\cos(kz) + B\sin(kz)$$

Funkcja falowa musi być ciągła:

$$A\cos(ka/2) + B\sin(ka/2) = 0$$
$$A\cos(-ka/2) + B\sin(-ka/2) = 0$$

Uwaga: w tym zagadnieniu nie żądamy ciągłości pochodnych f.f. bo mamy nieskończony skok potencjału

Nieskończona studnia 1-D, 2

$$\psi(z) = A\cos(kz) + B\sin(kz)$$

+ równania ciągłości dają dyskretny zbiór funkcji falowych i energii cząstki

$$\psi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{n\pi z}{a} \quad \text{dla n} = 1,3,5,\ldots$$

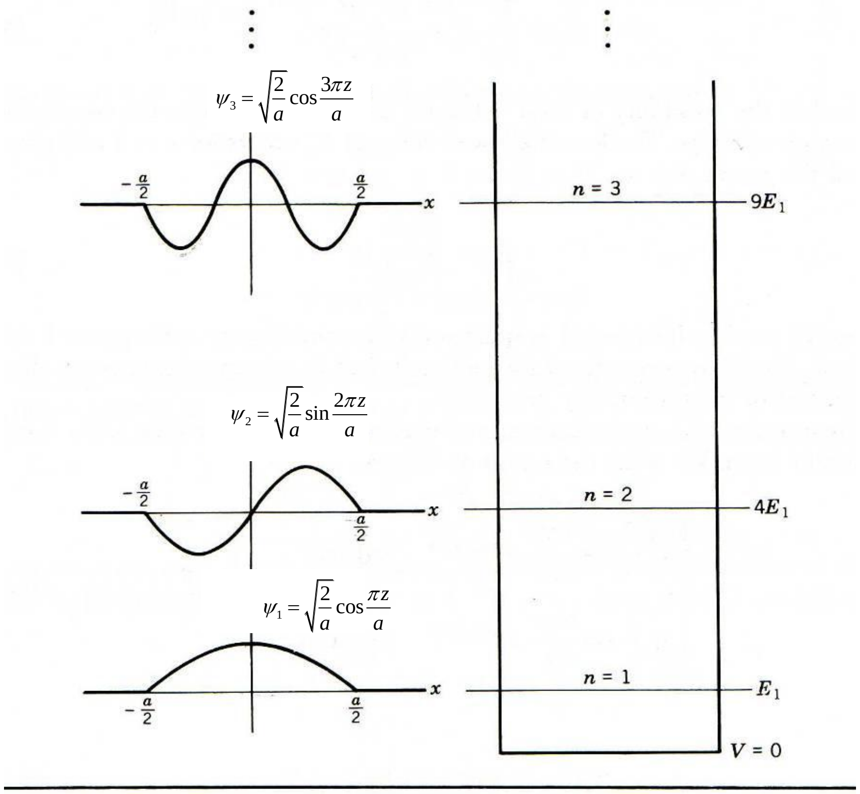
$$\psi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi z}{a} \quad \text{dla n} = 2,4,6,\ldots$$

funkcje falowe są orto-normalne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m \psi_m{}^* dz = \delta_{nm}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}k_n{}^2 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}n^2$$

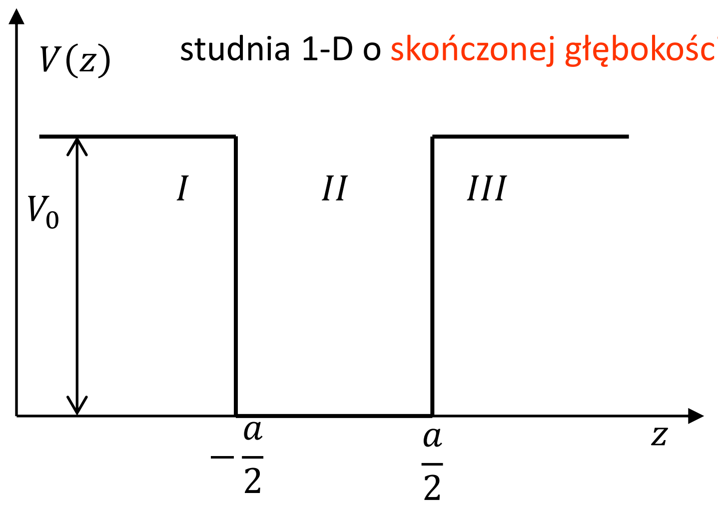
$$E_n = n^2 E_1$$



nieskończona liczba dyskretnych poziomów energetycznych

cząstka w jamie (o skończonej głębokości)

Cząstka o masie m umieszczona w jednowymiarowej jamie (studni) potencjału. Szerokość studni: a



$$V(z) = \begin{cases} V_0 \text{ dla } z \le -\frac{a}{2} \\ 0 \text{ dla } -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \\ V_0 \text{ dla } z \ge \frac{a}{2} \end{cases}$$

Rozważamy ruch cząstki oddzielnie w każdym z obszarów $I - III$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dz^2} = (E - V_0)\psi \qquad z \le -\frac{a}{2} \qquad (1)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dz^2} = E\psi \qquad -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \qquad (2)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dz^2} = (E - V_0)\psi \qquad z \ge \frac{a}{2} \qquad (3)$$

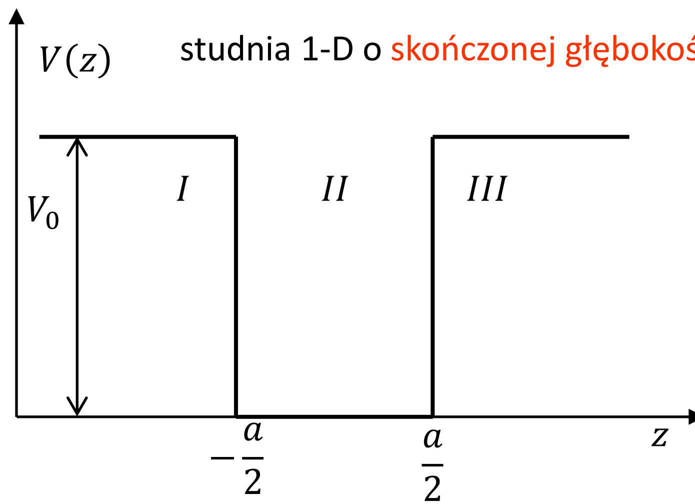
cząstka w skończonej jamie, 2

W obszarze *II* korzystamy z gotowych rozwiązań dla nieskończenie głębokiej studni

$$\psi_{II}(z) = A\cos(kz) + B\sin(kz)$$

z $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

studnia 1-D o skończonej głębokości



W obszarach *I* i *III* mamy dwie możliwości

1. $E > V_0$ cząstka swobodna
2. $E < V_0$ cząstka uwięziona w jamie

Zajmiemy się przypadkiem 2.

W obszarze I r-nie Schrodingera:

$$\frac{d^2\psi_I}{dz^2} - \alpha^2\psi_I = 0$$

gdzie $\alpha^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$

ma rozwiązania wykładnicze

$$\psi_I(z) = Ce^{-\alpha z} + De^{\alpha z}$$

Analogicznie,

$$\psi_{III}(z) = Ee^{-\alpha z} + Fe^{\alpha z}$$

Wybieramy rozwiązania zanikające:

$$\psi_I(z) = De^{\alpha z}$$
$$\psi_{III}(z) = Ee^{-\alpha z}$$

Żądamy ciągłości funkcji falowej i jej pochodnej na granicach obszarów

$$\psi_I(-a/2) = \psi_{II}(-a/2)$$
$$\left.\frac{d\psi_I}{dz}\right|_{-a/2} = \left.\frac{d\psi_{II}}{dz}\right|_{-a/2}$$

To samo dla granicy w $a/2$.

cząstka w skończonej jamie, 3

Dzielimy rozwiązania na parzyste i nieparzyste. Zajmiemy się pierwszymi. Ciągłość funkcji falowej i jej pochodnej w $-a/2$ daje

$$A\cos(-ka/2) = De^{-\alpha a/2}$$

$$-kA\sin(-ka/2) = \alpha De^{-\alpha a/2}$$

Dzieląc powyższe r-nia stronami dostajemy

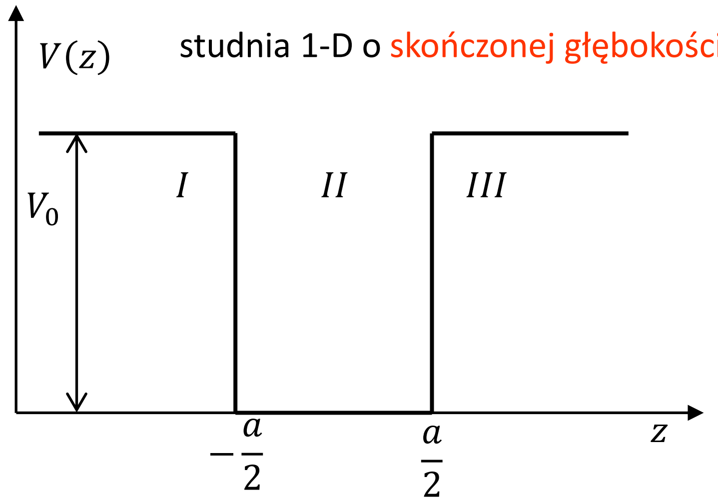
$$k\tan(ka/2) = \alpha$$

i przekształcamy do

$$(ka/2)\tan(ka/2) = \alpha a/2$$

Dla modów niesymetrycznych analogiczne rachunki dają

$$-(ka/2)\cot(ka/2) = \alpha a/2$$



Nowe, bezwymiarowe, zmienne:

$$u = \alpha a/2$$

$$v = ka/2$$

pozwalają zapisać r-nia wyżej w postaci

$u = v\tan v$ — rozw. symetryczne

$u = -v\cot v$ — rozw. niesymetryczne

Jednocześnie, z poprzedniej transparencji, wyliczamy

$$u^2 + v^2 = \frac{mV_0 a}{\hbar^2}$$

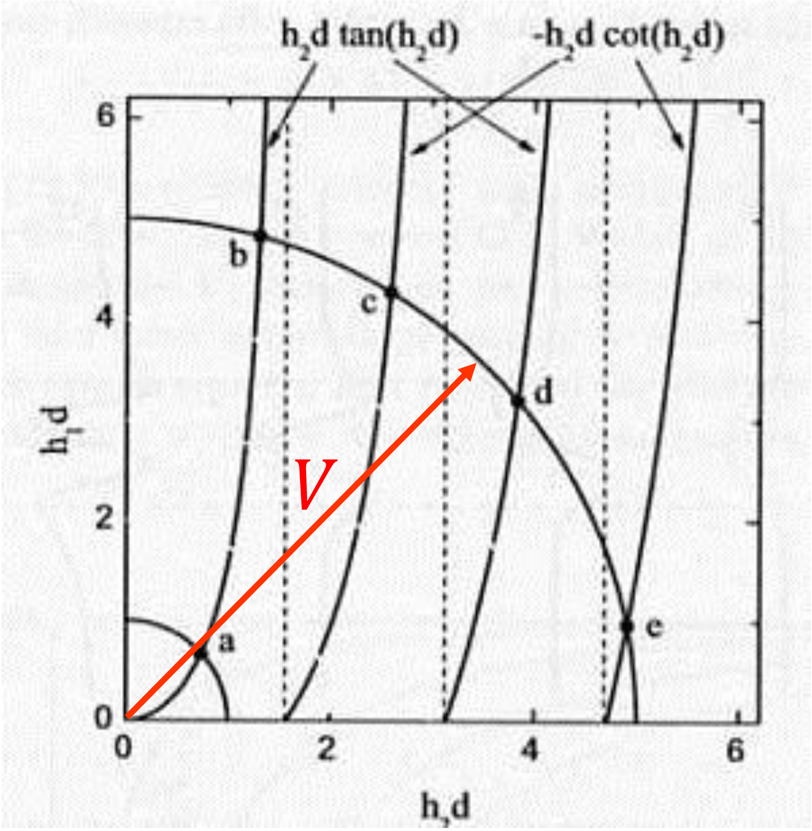
cząstka w skończonej jamie, 4

$u^2 + v^2 = \frac{mV_0 a}{\hbar^2}$

$u = v \tan v$ rozw. symetryczne

$u = -v \cot v$ rozw. niesymetryczne

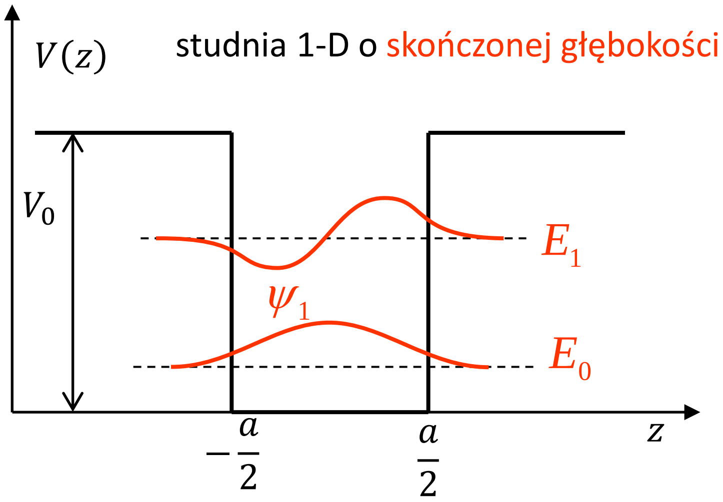
Taki zestaw równań już raz rozwiązywaliśmy przy okazji analizy dielektrycznego płaskiego falowodu symetrycznego (wykład 6). Wystarczy zrobić podstawienie $v \to h_2 d$, $u \to h_1 d$ oraz $\frac{mV_0 a}{\hbar^2} \to V$ aby skorzystać z gotowych rozwiązań…



Wnioski:

1. Liczba rozwiązań n_{max} jest zawsze skończona i zależy od wartości parametru $\frac{mV_0 a}{\hbar^2}$. W szczególności dla $\frac{mV_0 a}{\hbar^2} < \frac{\pi}{2}$ istnieje tylko jedno rozwiązanie – pojedynczy stan związany w studni.
2. Rozwiązania możemy ponumerować poczynając od 1 do n_{max}
3. Energie kolejnych stanów rosną numerem indeksu

cząstka w skończonej jamie, 5

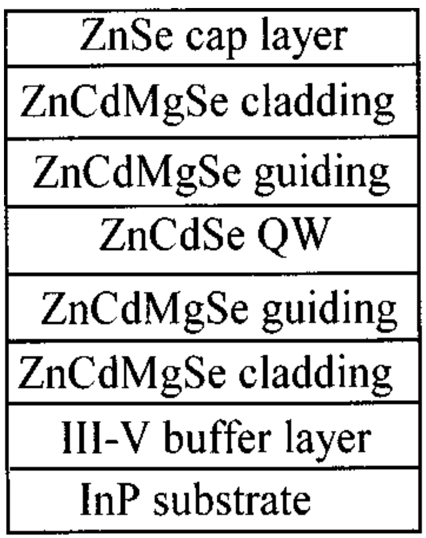


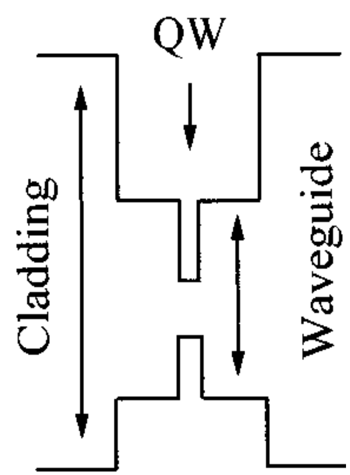
Wnioski:

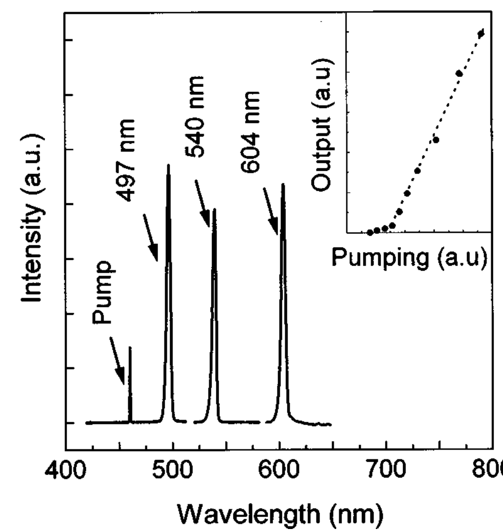
1. Funkcja falowa cząstki „wypełnia" jamę potencjału – cząstka jest równocześnie w całej jamie choć prawdopodobieństwo znalezienia jej w poszczególnych obszarach nie jest takie samo.
2. Funkcje falowe mają niezerową amplitudę także w obszarach gdzie $E < V_0$. W obrazie klasycznym nie ma takiej możliwości.
3. Głębokość „wnikania" funkcji falowej w obszar klasycznie zabroniony jest różna dla różnych rozwiązań – generalna zasada: im bliżej V_0 jest energia cząstki tym głębiej penetruje ona obszary poza studnią

Półprzewodnikowe studnie kwantowe

Przykład: laser na studniach kwantowych







L. Zeng, et al. APL 72 3136-3138 (1998)

Nieskończona studnia 3-D, 1

Cząstka o masie m zamknięta w prostopadłościennym pudełku o wymiarach $a \times b \times c$

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 \text{ dla } -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2}, -\frac{c}{2} < z < \frac{c}{2} \\ \infty \text{ wszędzie indziej} \end{cases}$$

Funkcja falowa zeruje się poza pudełkiem. Wewnątrz pudełka szukamy rozwiązań iloczynowych

$$\psi(x,y,z) = \psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z)$$

Wstawiamy do r-nia Schrodingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi = E\psi$$

i przekształcamy do

$$\frac{1}{\psi_x}\frac{d^2\psi_x}{dx^2} + \frac{1}{\psi_x}\frac{d^2\psi_y}{dy^2} + \frac{1}{\psi_x}\frac{d^2\psi_z}{dz^2} + k^2 = 0$$

gdzie, ponownie, $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$.

Ostatnia równość jest równoważna 3 r-niom

$$\frac{d^2\psi_i}{dx^2} + {k_i}^2\psi_i = 0, \qquad i = x, y, z, \qquad \sum_i {k_i}^2 = k^2$$

Nieskończona studnia 3-D, 2

Dla każdego wymiaru stosujemy znane rozwiązania studni 1-D:

$$\psi_{xl}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{l\pi x}{a} \quad \text{dla } l = 1,3,5,\ldots$$

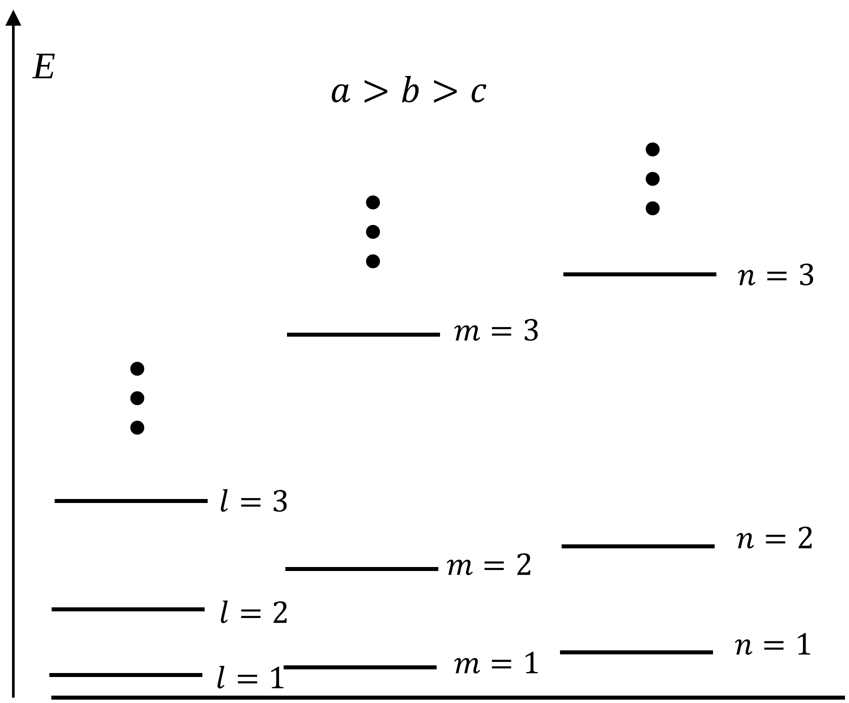
$$\psi_{xl}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{l\pi x}{a} \quad \text{dla } l = 2,4,6,\ldots$$

$$\psi_{ym}(y) = \sqrt{\frac{2}{b}}\cos\frac{m\pi y}{b} \quad \text{dla } m = 1,3,5,\ldots$$

$$\psi_{ym}(y) = \sqrt{\frac{2}{b}}\sin\frac{m\pi y}{b} \quad \text{dla } m = 2,4,6,\ldots$$

$$\psi_{zn}(z) = \sqrt{\frac{2}{c}}\cos\frac{n\pi z}{c} \quad \text{dla } n = 1,3,5,\ldots$$

$$\psi_{zn}(z) = \sqrt{\frac{2}{c}}\sin\frac{n\pi z}{c} \quad \text{dla } n = 2,4,6,\ldots$$



$$\psi_{lmn}(x,y,z) = \psi_{xl}(x)\psi_{ym}(y)\psi_{zn}(z)$$

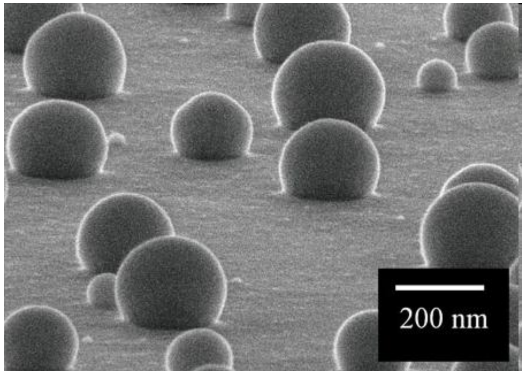
$$E_{lmn} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c^2}\right)$$

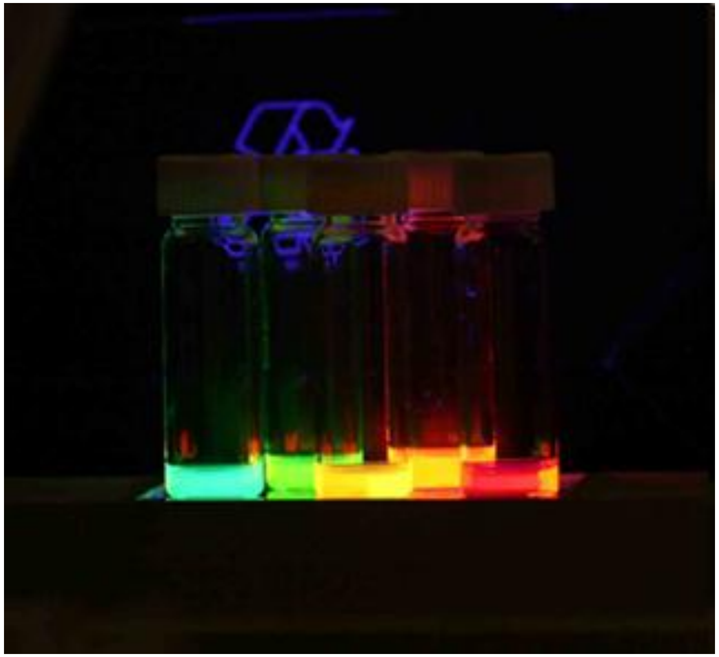
układ jest opisany przez 3 liczby kwantowe

$l, m, n = 1,2,3 \ldots$

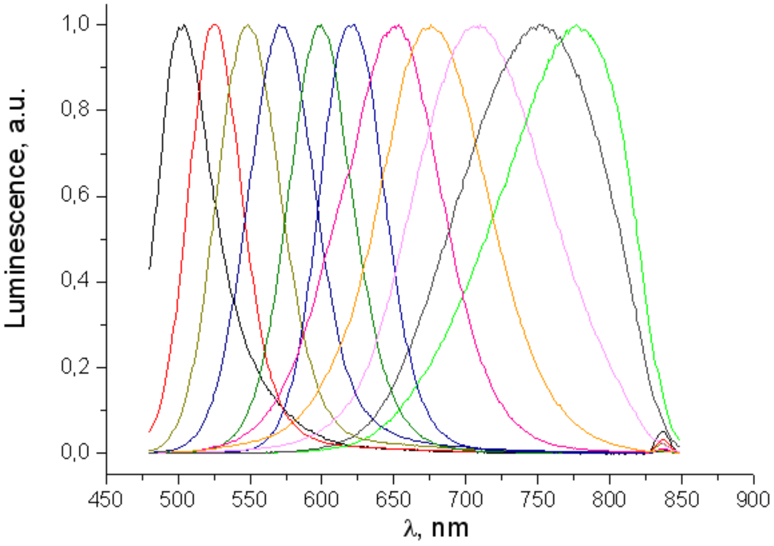
kropki kwantowe, 1

Studnia 3-D o skończonej głębokości



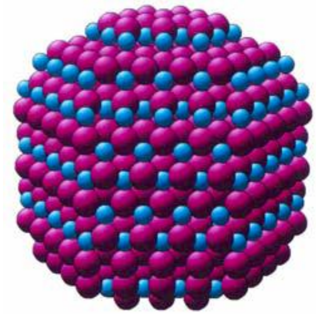


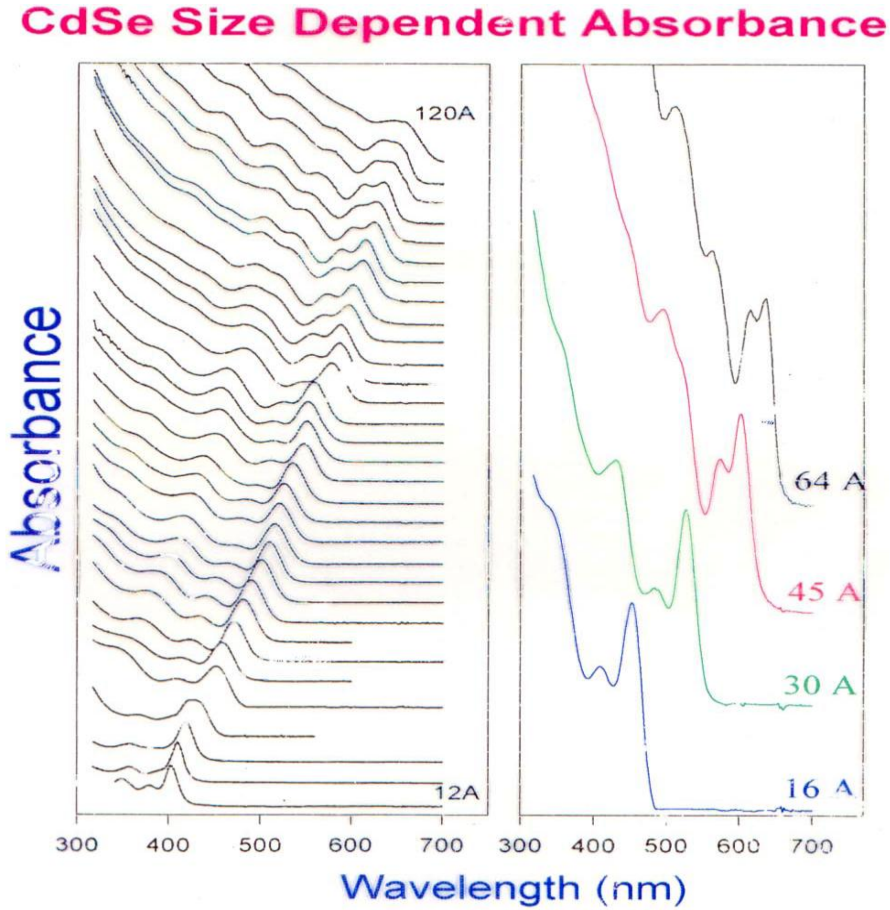
Im mniejsze kropki kwantowe tym bardziej niebieskie świecenie

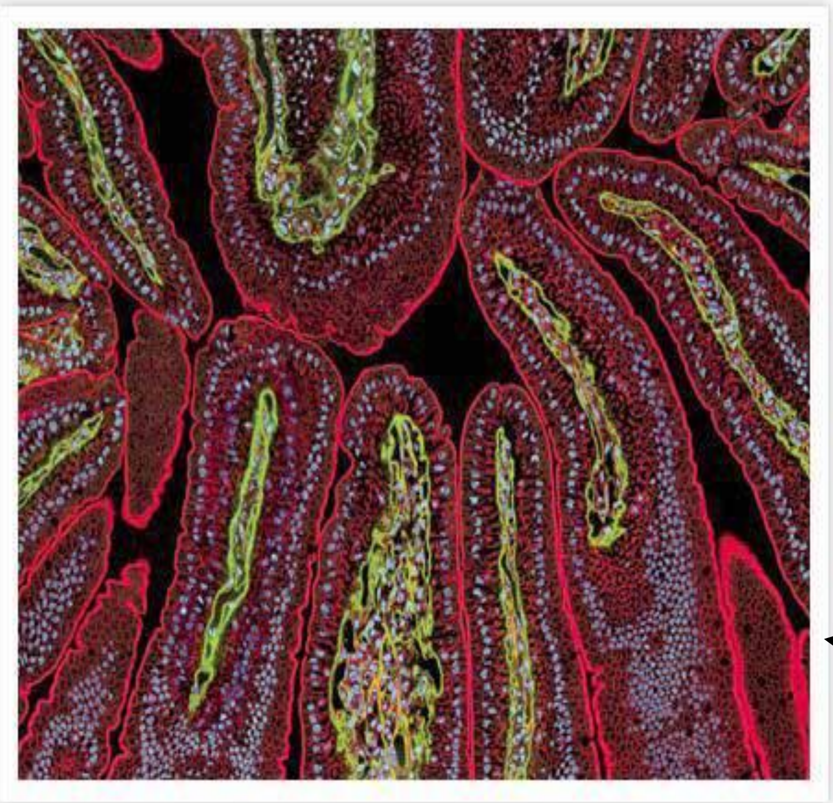


kropki kwantowe, 2

CdSe



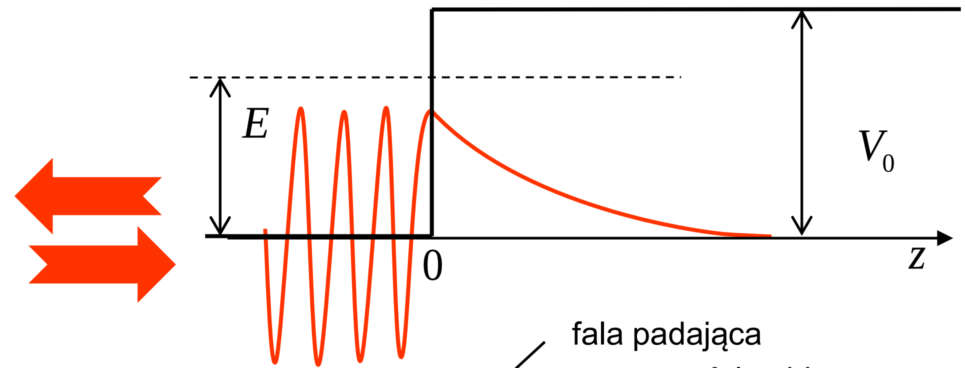




jelito myszy, różne markery:

actina	– czerwony
laminina	- zielony
jądro komórki	- niebieski

Schodek potencjału



cząstka pada od lewej strony na barierę potencjału. Oddzielnie wypisujemy r-nie Schrodingera dla obu obszarów

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + {k_1}^2\psi = 0$$

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} - {k_2}^2\psi = 0$$

$${k_1}^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} > 0,\ {k_2}^2 = \frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2} > 0$$

fala padająca

fala obita

$$\psi(z) = \begin{cases} Ae^{ik_1 z} + Be^{-ik_1 z} & \text{dla } z < 0 \\ Ce^{-k_2 z} & \text{dla } z > 0 \end{cases}$$

penetracja bariery
(fala ewanescencyjna)

Ciągłość f.f. i jej pochodnej

$$A + B = C$$

$$ik_1(A - B) = -k_2 C$$

$$B = \frac{1 - i\dfrac{k_1}{k_2}}{1 + i\dfrac{k_1}{k_2}}$$

$$|B|^2 = |A|^2$$

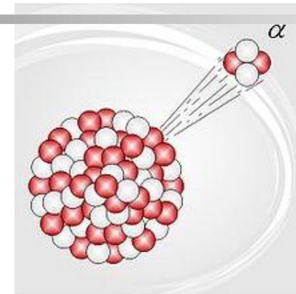
cząstka odbija się od schodka

głębokość wnikania $\cong 1/k_2$

analogia z całkowitym wewn. odbiciem (wykład 5)

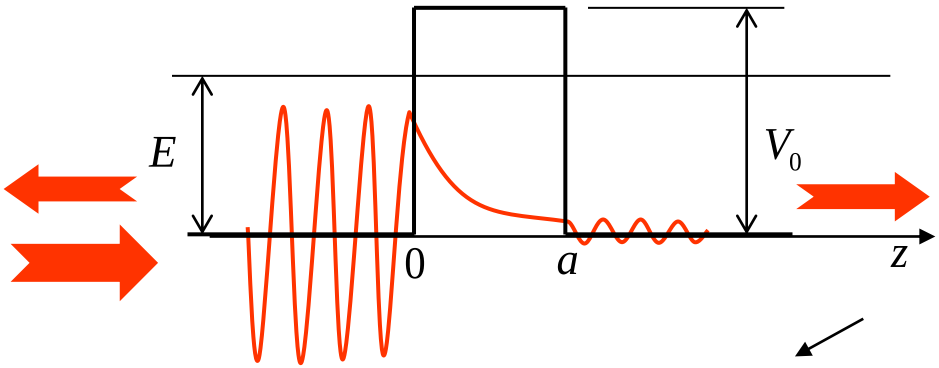
tunelowanie

1928 G. Gamov, emisja α



$$^{238}_{92}U \rightarrow ^{234}_{90}Th + ^{4}_{2}He^{2+}$$

$$\alpha \equiv ^{4}_{2}He^{2+}$$



rozwiązania: $\psi(z) = \begin{cases} Ae^{ik_1 z} + Be^{-ik_1 z} & \text{dla } z < 0 \\ Ce^{-k_2 z} & \text{dla } 0 < z < a \\ A'e^{ik_1 z} + B'e^{-ik_1 z} & \text{dla } z > a \end{cases}$

$$k_1{}^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$k_2{}^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$$

ciągłość f.f. i jej 1. pochodnej + rachunki...

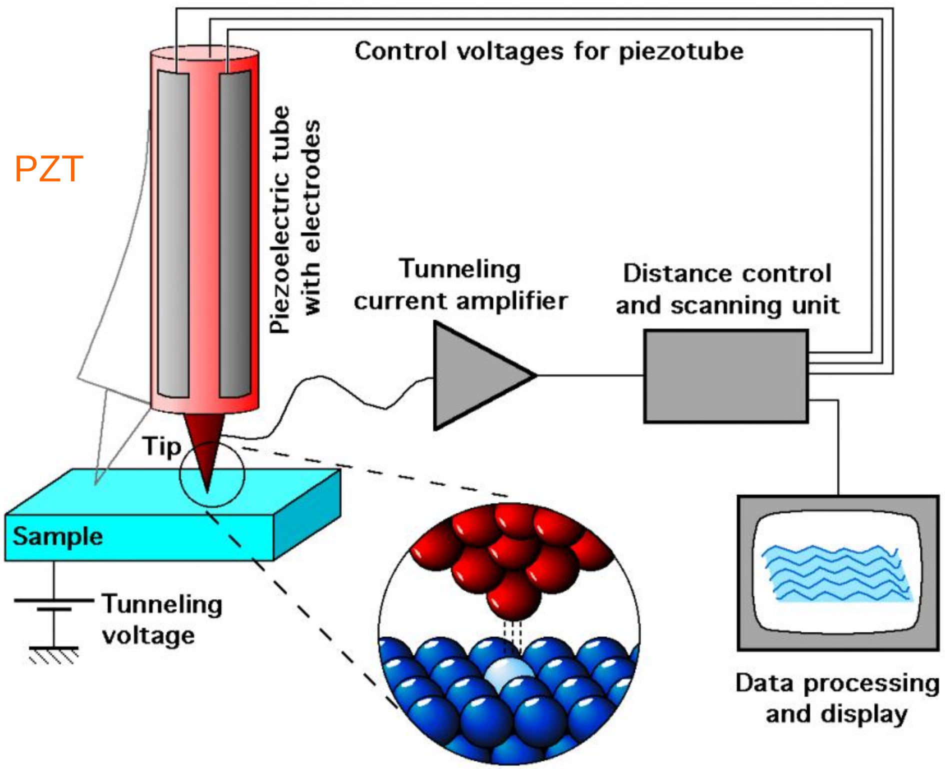
$$T = \left|\frac{A'}{A}\right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1}\right)^2 sinh^2(k_2 a)}$$

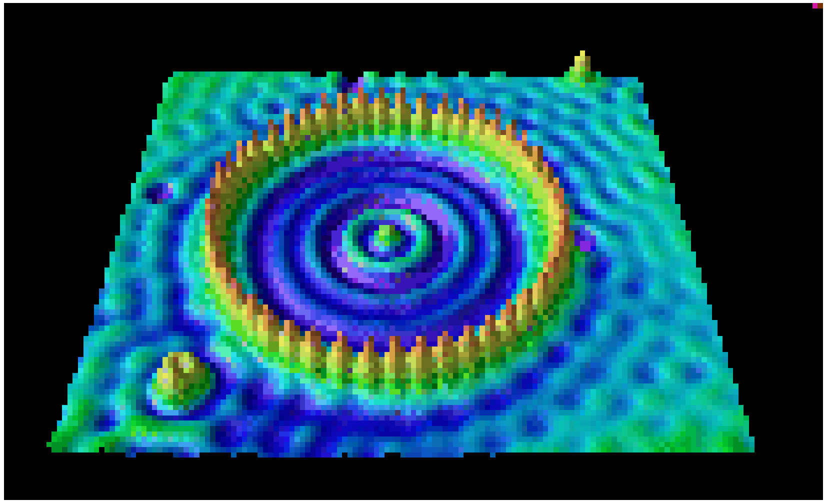
Słabe tunelowanie $k_2 a \gg 1$

$$T \cong 16\frac{E}{V_0}\left(1 - \frac{E}{V_0}\right)e^{-2k_2 a}$$

Scanning Tunelling Microscope (STM)

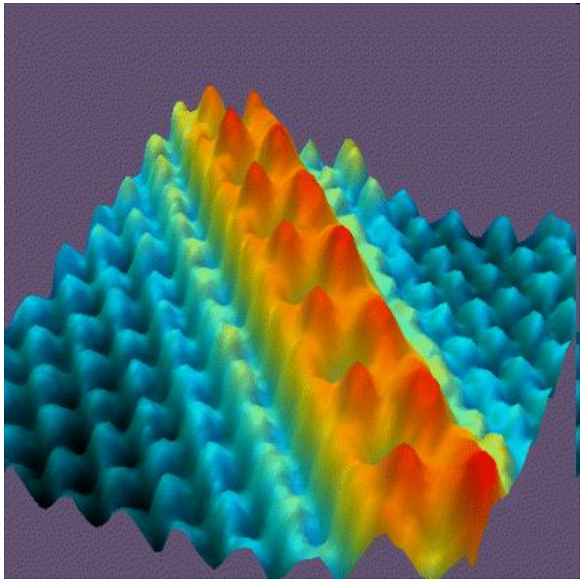
PZT





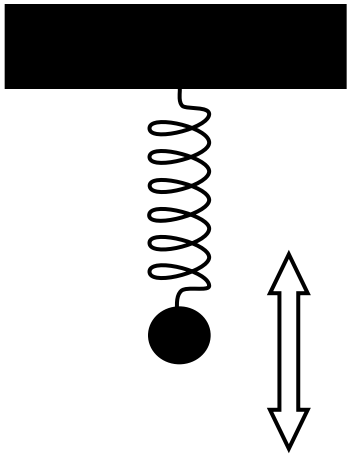
1. generacja

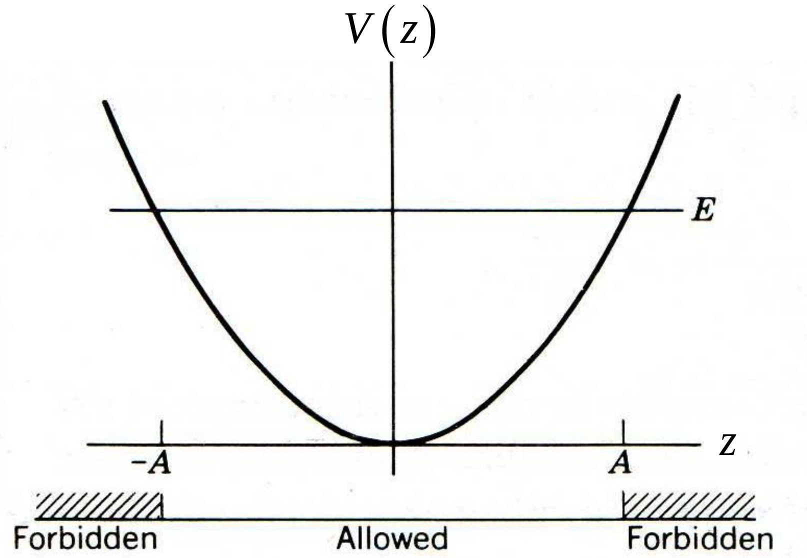
4. generacja



Czerwone - atomy Cs na GaAs (110) - niebieskie

oscylator harmoniczny, klasyczny





Potencjał i siła

$$V(z) = \frac{K}{2} z^2$$

$$F(z) = -\frac{dV}{dz} = -Kz$$

Równanie ruchu

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -Kz$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 z = 0, \omega^2 = \frac{K}{m}$$

Rozwiązanie

$$z(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

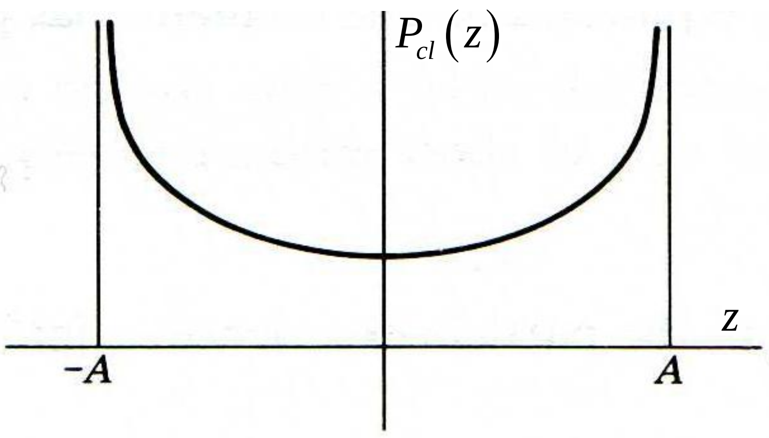
$$v(t) = \frac{dz}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

energia

$$E = \frac{m}{2} v^2 + \frac{K}{2} z^2 = \frac{K}{2} A^2$$

gęstość prawdopodobieństwa

$$P_{cl} = \frac{1}{\sqrt{A^2 - z^2}}$$



oscylator harmoniczny, kwantowy, 1

Stacjonarne równanie Schrodingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dz^2}+\frac{K}{2}z^2\psi=E\psi$$

$$-\frac{d^2\psi}{dz^2}+\frac{\omega^2}{\hbar^2}z^2\psi=\frac{2mE}{\hbar^2}\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dz^2}=(\zeta^2-\lambda)\psi,\ \zeta^2=\frac{m\omega}{\hbar}z,\lambda=\frac{2E}{\hbar\omega}$$

Potencjał

$$V(z)=\frac{K}{2}z^2$$

Rozwiązania:

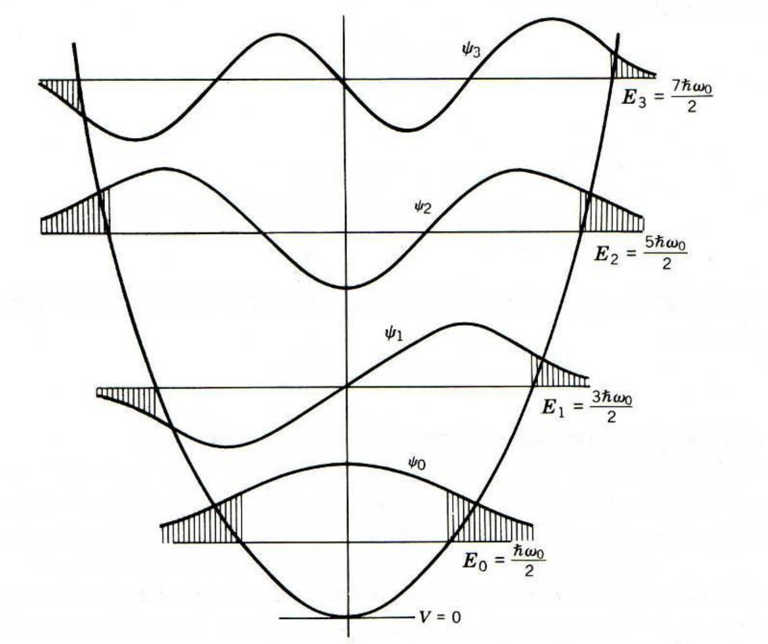
$$\psi_n(\zeta)=H_n(\zeta)e^{-\frac{\zeta^2}{2}},\qquad n=0,1,2\ \ldots$$

wielomian Hermite'a

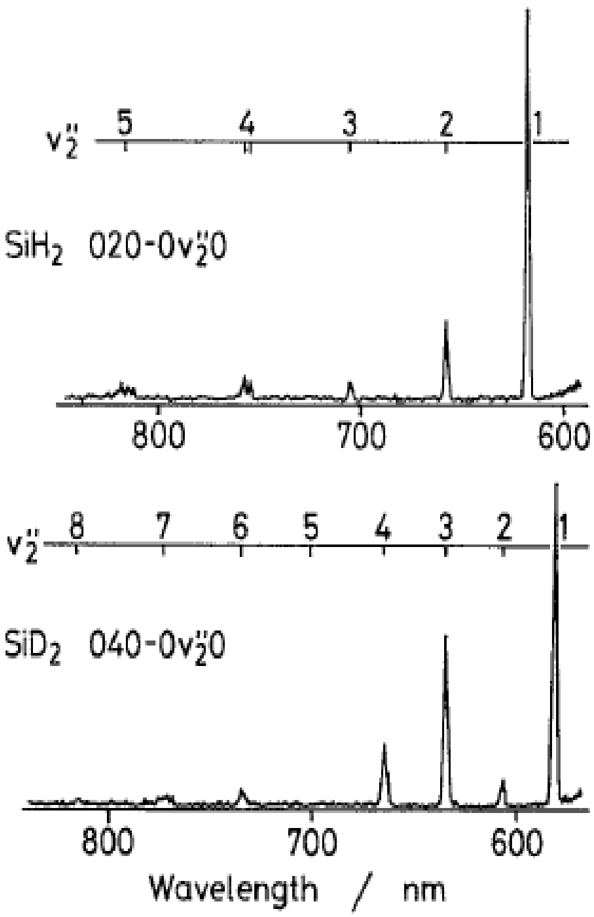
$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

Normalizacja

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m(\zeta)\psi_m{}^*(\zeta)d\zeta=\delta_{nm}$$

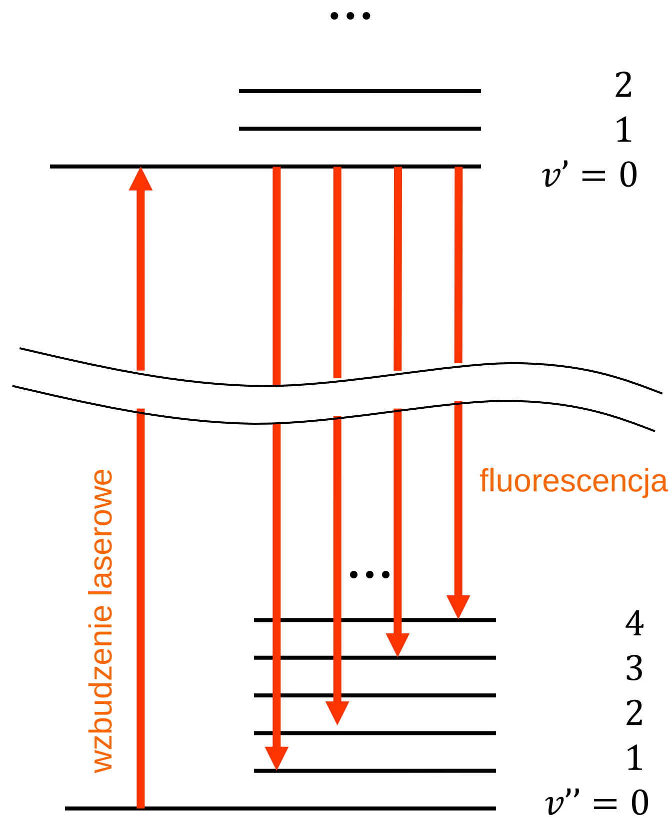


oscylator harmoniczny, kwantowy, 2



SiH$_2$

SiD$_2$



$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

M. Fukushima, S. Mayama, and K. Obi, J.Chem.Phys. **96**, 44-52 (1992)