Podstawy Fizyki IV
Optyka z elementami fizyki współczesnej

wykład 26, 28.05.2012

wykład:	Czesław Radzewicz
pokazy:	Radosław Chrapkiewicz, Filip Ozimek
ćwiczenia:	Ernest Grodner

Wykład 25 - przypomnienie

- promienienie katodowe i anodowe
- promienie Roentgena, dyfrakcja na kryształach
- fale materii – hipoteza de Broglie'a
- r-nie Schrodingera
  - interpretacja funkcji falowej
- studnie potencjału, 1-D, 3-D
  - nieskończona
  - skończona

Wracamy do wykładu 25

Każdy układ kwantowy możemy opisać funkcją falową

$$\Psi(x, y, z, t)$$

Funkcja Ψ spełnia nierelatywistyczne r-nie Schrodingera to

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V(z,t)\Psi = i\hbar\frac{d\Psi}{dt}$$

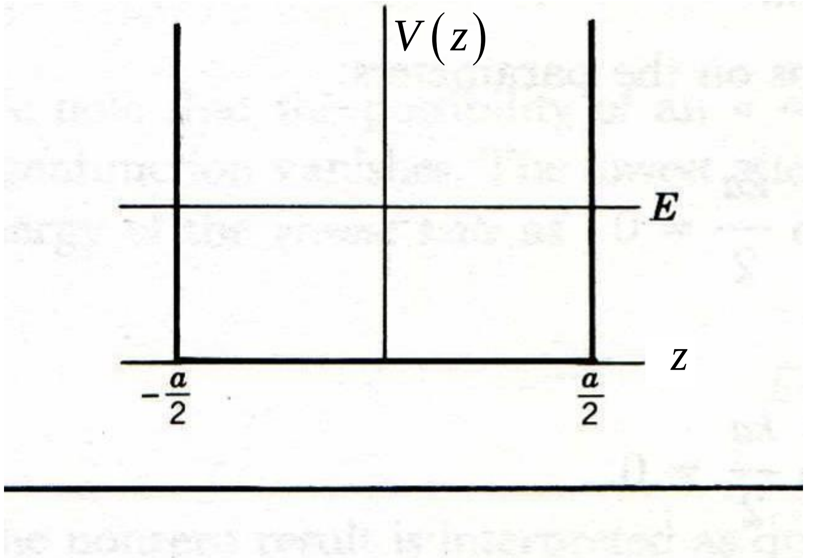
gdzie $V(z,t)$ opisuje potencjał

Interpretacja funkcji falowej:

- gęstość prawdopodobieństwa $P(z,t) = |\Psi(z,t)|^2$
- interferencja
$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2, |\Psi|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + 2\mathrm{Re}(\Psi_1\Psi_2{}^*)$$
- normalizacja f.f. $\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi(z,t)|^2 dz = 1$
- prąd prawdopodobieństwa $\frac{\hbar}{2im}\left(\Psi^*\frac{d\Psi}{dz} - \frac{d\Psi^*}{dz}\Psi\right)$

nieskończona studnia 1-D, 1

Cząstka o masie m zamknięta w jednowymiarowym pudełku. Długość pudełka: a



$$V(z) = \begin{cases} 0 \text{ dla } -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \\ \infty \text{ dla } |z| \geq \frac{a}{2} \end{cases}$$

Dla $|z| \geq \frac{a}{2}$ mamy $\psi(z) = 0$

W obszarze $-\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}$ trzeba znaleźć rozwiązanie r-nia Schrodingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dz^2} = E\psi$$

czyli

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + k^2\psi = 0$$

gdzie $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

Rozwiązania to

$$\psi(z) = A\cos(kz) + B\sin(kz)$$

Funkcja falowa musi być ciągła:

$$A\cos(ka/2) + B\sin(ka/2) = 0$$
$$A\cos(-ka/2) + B\sin(-ka/2) = 0$$

Uwaga: w tym zagadnieniu nie żądamy ciągłości pochodnych f.f. bo mamy nieskończony skok potencjału

Nieskończona studnia 1-D, 2

$$\psi(z) = A\cos(kz) + B\sin(kz)$$

+ równania ciągłości dają dyskretny zbiór funkcji falowych i energii cząstki

$$\psi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{n\pi z}{a} \quad \text{dla n} = 1,3,5,\ldots$$

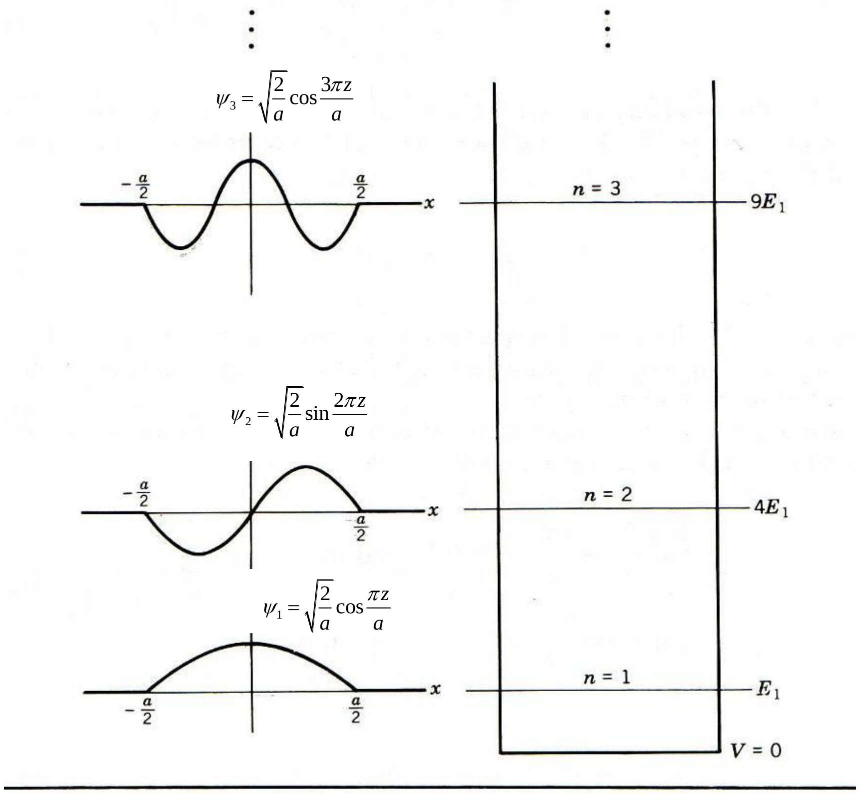
$$\psi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi z}{a} \quad \text{dla n} = 2,4,6,\ldots$$

funkcje falowe są orto-normalne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m \psi_m{}^* dz = \delta_{nm}$$

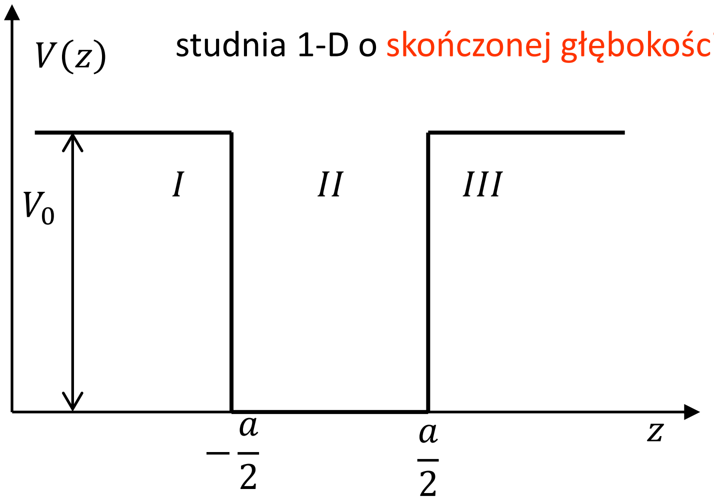
$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}k_n{}^2 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}n^2$$

$$E_n = n^2 E_1$$



nieskończona liczba dyskretnych poziomów energetycznych

cząstka w jamie (o skończonej głębokości)



Cząstka o masie m umieszczona w jednowymiarowej jamie (studni) potencjału. Szerokość studni: a

$$V(z) = \begin{cases} V_0 \text{ dla } z \le -\frac{a}{2} \\ 0 \text{ dla } -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \\ V_0 \text{ dla } z \ge \frac{a}{2} \end{cases}$$

Rozważamy ruch cząstki oddzielnie w każdym z obszarów $I - III$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dz^2} = (E - V_0)\psi \qquad z \le -\frac{a}{2} \qquad (1)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dz^2} = E\psi \qquad -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \qquad (2)$$

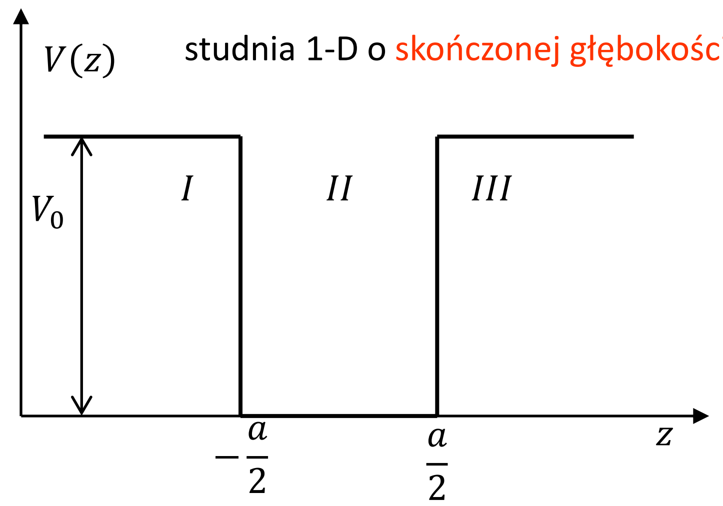
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dz^2} = (E - V_0)\psi \qquad z \ge \frac{a}{2} \qquad (3)$$

cząstka w skończonej jamie, 2

W obszarze *II* korzystamy z gotowych rozwiązań dla nieskończenie głębokiej studni

$$\psi_{II}(z) = A\cos(kz) + B\sin(kz)$$

z $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$



W obszarach *I* i *III* mamy dwie możliwości

1. $E > V_0$ cząstka swobodna
2. $E < V_0$ cząstka uwięziona w jamie

Zajmiemy się przypadkiem 2.

W obszarze I r-nie Schrodingera:

$$\frac{d^2\psi_I}{dz^2} - \alpha^2\psi_I = 0$$

gdzie $\alpha^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$

ma rozwiązania wykładnicze

$$\psi_I(z) = Ce^{-\alpha z} + De^{\alpha z}$$

Analogicznie,

$$\psi_{III}(z) = Ee^{-\alpha z} + Fe^{\alpha z}$$

Wybieramy rozwiązania zanikające:

$$\psi_I(z) = De^{\alpha z}$$
$$\psi_{III}(z) = Ee^{-\alpha z}$$

Żądamy ciągłości funkcji falowej i jej pochodnej na granicach obszarów

$$\psi_I(-a/2) = \psi_{II}(-a/2)$$
$$\left.\frac{d\psi_I}{dz}\right|_{-a/2} = \left.\frac{d\psi_{II}}{dz}\right|_{-a/2}$$

To samo dla granicy w $a/2$.

cząstka w skończonej jamie, 3

Dzielimy rozwiązania na parzyste i nieparzyste. Zajmiemy się pierwszymi. Ciągłość funkcji falowej i jej pochodnej w $-a/2$ daje

$$A\cos(-ka/2) = De^{-\alpha a/2}$$
$$-kA\sin(-ka/2) = \alpha De^{-\alpha a/2}$$

Dzieląc powyższe r-nia stronami dostajemy

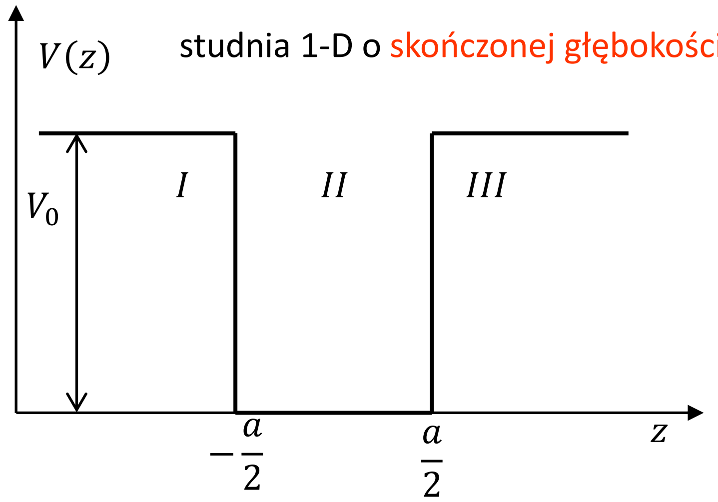
$$k\tan(ka/2) = \alpha$$

i przekształcamy do

$$(ka/2)\tan(ka/2) = \alpha a/2$$

Dla modów niesymetrycznych analogiczne rachunki dają

$$-(ka/2)\cot(ka/2) = \alpha a/2$$



Nowe, bezwymiarowe, zmienne:

$$u = \alpha a/2$$
$$v = ka/2$$

pozwalają zapisać r-nia wyżej w postaci

$u = v\tan v$ rozw. symetryczne

$u = -v\cot v$ rozw. niesymetryczne

Jednocześnie, z poprzedniej transparencji, wyliczamy

$$u^2 + v^2 = \frac{mV_0 a}{\hbar^2}$$

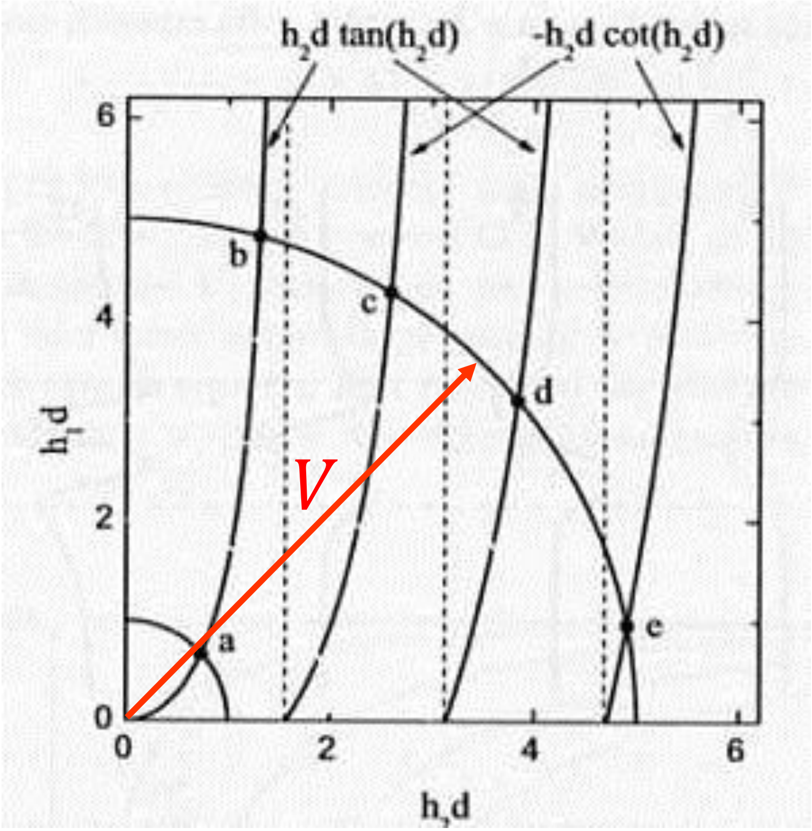
cząstka w skończonej jamie, 4

$u^2 + v^2 = \frac{mV_0 a}{\hbar^2}$

$u = v \tan v$ rozw. symetryczne

$u = -v \cot v$ rozw. niesymetryczne

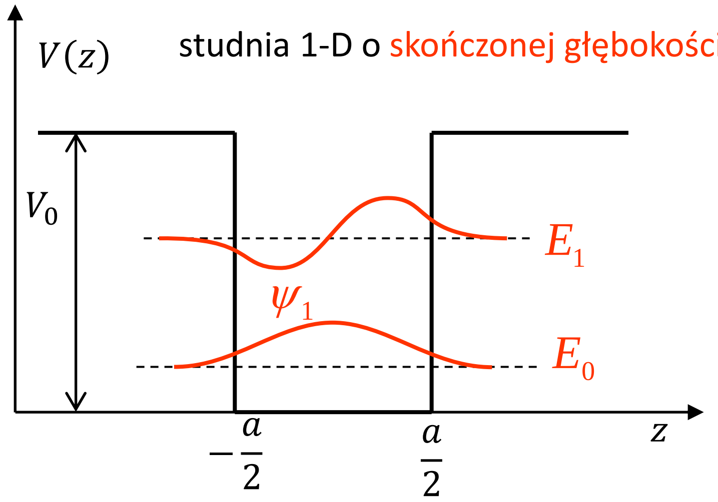
Taki zestaw równań już raz rozwiązywaliśmy przy okazji analizy dielektrycznego płaskiego falowodu symetrycznego (wykład 6). Wystarczy zrobić podstawienie $v \to h_2 d$, $u \to h_1 d$ oraz $\frac{mV_0 a}{\hbar^2} \to V$ aby skorzystać z gotowych rozwiązań…



Wnioski:

1. Liczba rozwiązań n_{max} jest zawsze skończona i zależy od wartości parametru $\frac{mV_0 a}{\hbar^2}$. W szczególności dla $\frac{mV_0 a}{\hbar^2} < \frac{\pi}{2}$ istnieje tylko jedno rozwiązanie – pojedynczy stan związany w studni.
2. Rozwiązania możemy ponumerować poczynając od 1 do n_{max}
3. Energie kolejnych stanów rosną numerem indeksu

cząstka w skończonej jamie, 5

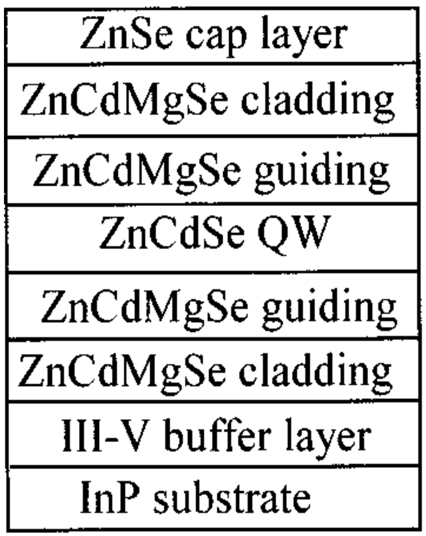


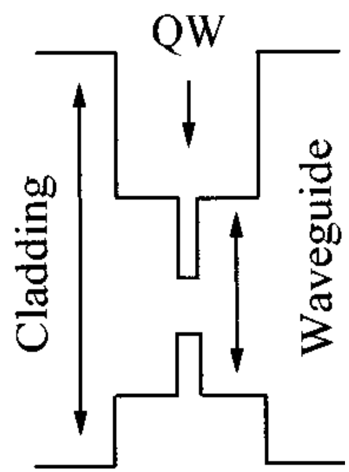
Wnioski:

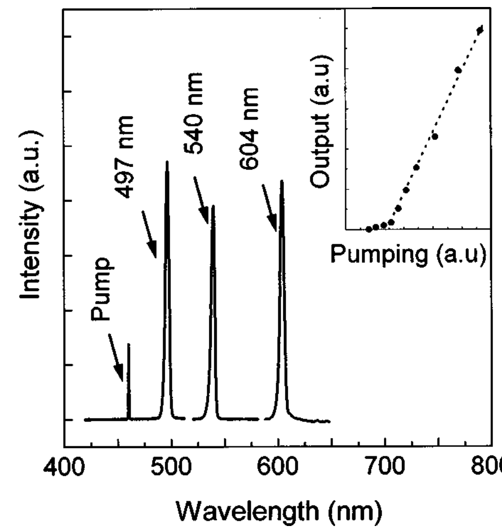
1. Funkcja falowa cząstki „wypełnia" jamę potencjału – cząstka jest równocześnie w całej jamie choć prawdopodobieństwo znalezienia jej w poszczególnych obszarach nie jest takie samo.
2. Funkcje falowe mają niezerową amplitudę także w obszarach gdzie $E < V_0$. W obrazie klasycznym nie ma takiej możliwości.
3. Głębokość „wnikania" funkcji falowej w obszar klasycznie zabroniony jest różna dla różnych rozwiązań – generalna zasada: im bliżej V_0 jest energia cząstki tym głębiej penetruje ona obszary poza studnią

Półprzewodnikowe studnie kwantowe

Przykład: laser na studniach kwantowych







L. Zeng, et al. APL 72 3136-3138 (1998)

Nieskończona studnia 3-D, 1

Cząstka o masie m zamknięta w prostopadłościennym pudełku o wymiarach $a \times b \times c$

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 \text{ dla } -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}, -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2}, -\frac{c}{2} < z < \frac{c}{2} \\ \infty \text{ wszędzie indziej} \end{cases}$$

Funkcja falowa zeruje się poza pudełkiem. Wewnątrz pudełka szukamy rozwiązań iloczynowych

$$\psi(x,y,z) = \psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z)$$

Wstawiamy do r-nia Schrodingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi = E\psi$$

i przekształcamy do

$$\frac{1}{\psi_x}\frac{d^2\psi_x}{dx^2} + \frac{1}{\psi_x}\frac{d^2\psi_y}{dy^2} + \frac{1}{\psi_x}\frac{d^2\psi_z}{dz^2} + k^2 = 0$$

gdzie, ponownie, $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$.

Ostatnia równość jest równoważna 3 r-niom

$$\frac{d^2\psi_i}{dx^2} + {k_i}^2\psi_i = 0, \qquad i = x,y,z, \qquad \sum_i {k_i}^2 = k^2$$

Nieskończona studnia 3-D, 2

Dla każdego wymiaru stosujemy znane rozwiązania studni 1-D:

$$\psi_{xl}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{l\pi x}{a} \quad \text{dla } l = 1,3,5,\ldots$$

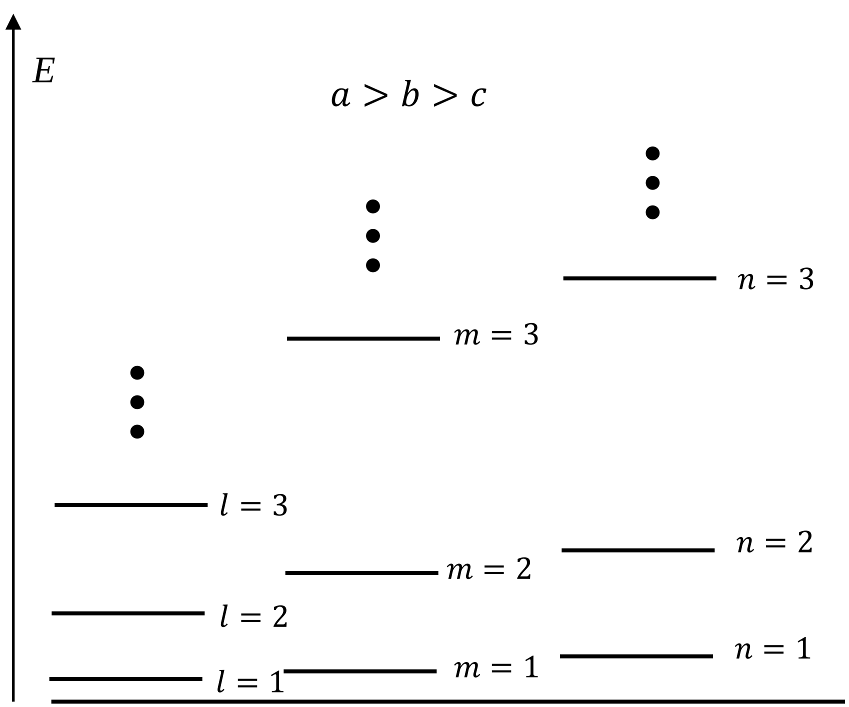
$$\psi_{xl}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{l\pi x}{a} \quad \text{dla } l = 2,4,6,\ldots$$

$$\psi_{ym}(y) = \sqrt{\frac{2}{b}}\cos\frac{m\pi y}{b} \quad \text{dla } m = 1,3,5,\ldots$$

$$\psi_{ym}(y) = \sqrt{\frac{2}{b}}\sin\frac{m\pi y}{b} \quad \text{dla } m = 2,4,6,\ldots$$

$$\psi_{zn}(z) = \sqrt{\frac{2}{c}}\cos\frac{n\pi z}{c} \quad \text{dla } n = 1,3,5,\ldots$$

$$\psi_{zn}(z) = \sqrt{\frac{2}{c}}\sin\frac{n\pi z}{c} \quad \text{dla } n = 2,4,6,\ldots$$



$$\psi_{lmn}(x,y,z) = \psi_{xl}(x)\psi_{ym}(y)\psi_{zn}(z)$$

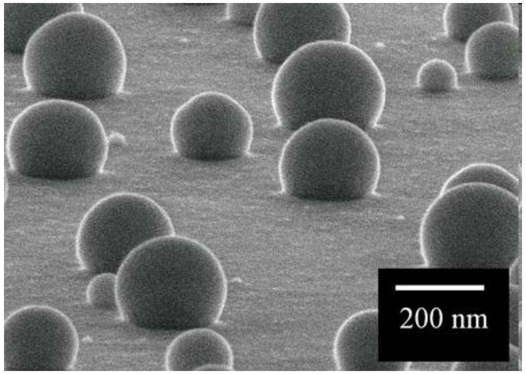
$$E_{lmn} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c^2}\right)$$

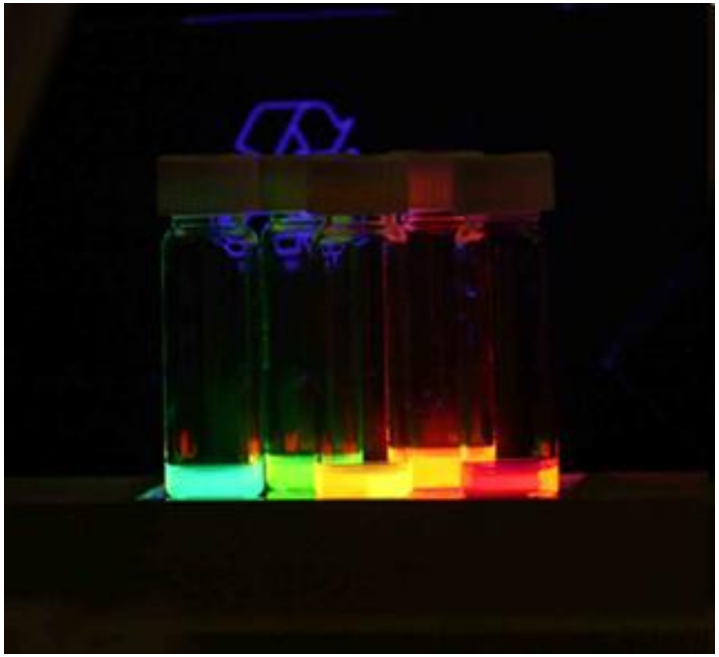
układ jest opisany przez 3 liczby kwantowe

$l, m, n = 1,2,3 \ldots$

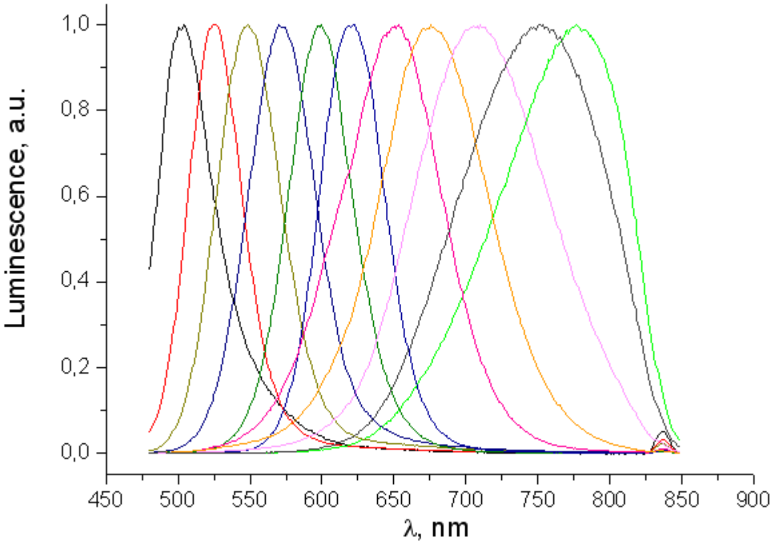
kropki kwantowe, 1

Studnia 3-D o skończonej głębokości



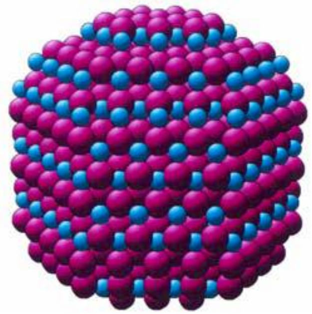


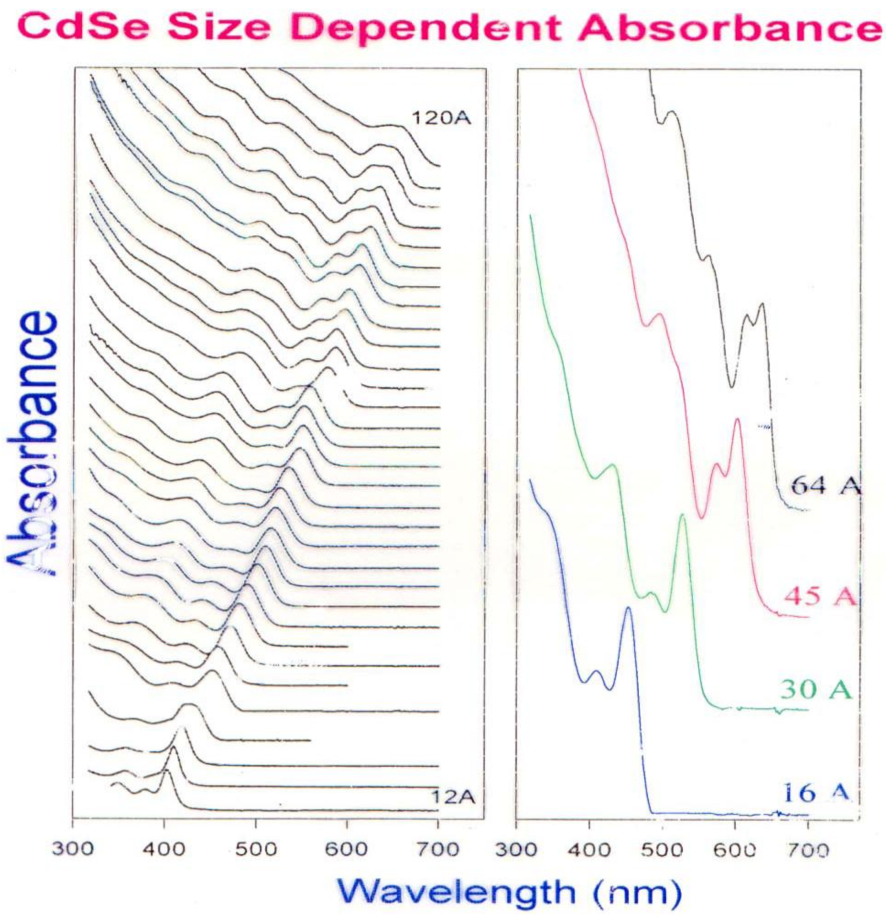
Im mniejsze kropki kwantowe tym bardziej niebieskie świecenie

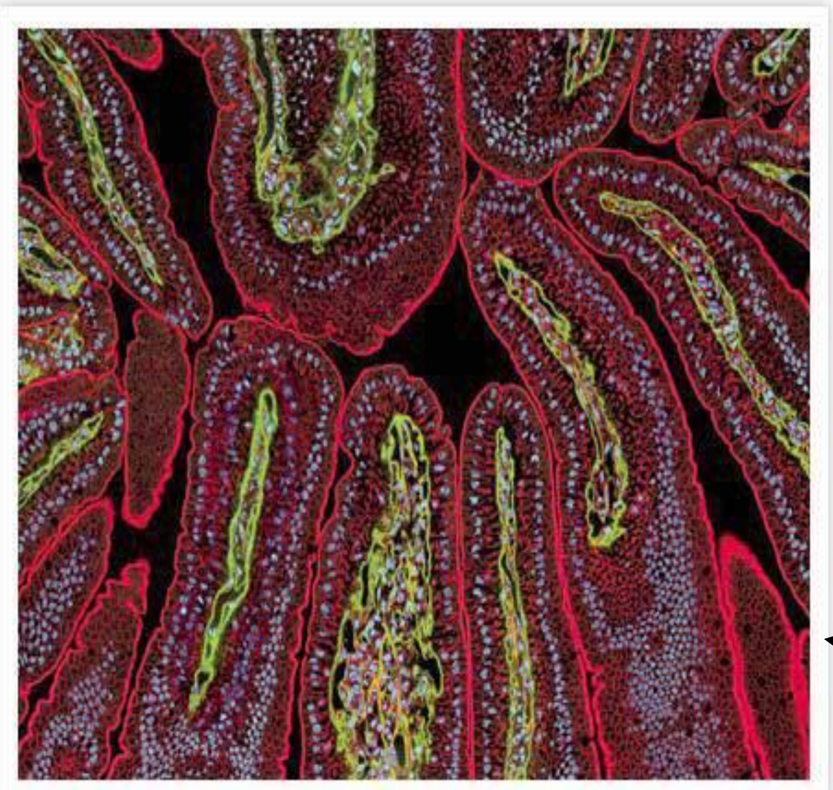


kropki kwantowe, 2

CdSe



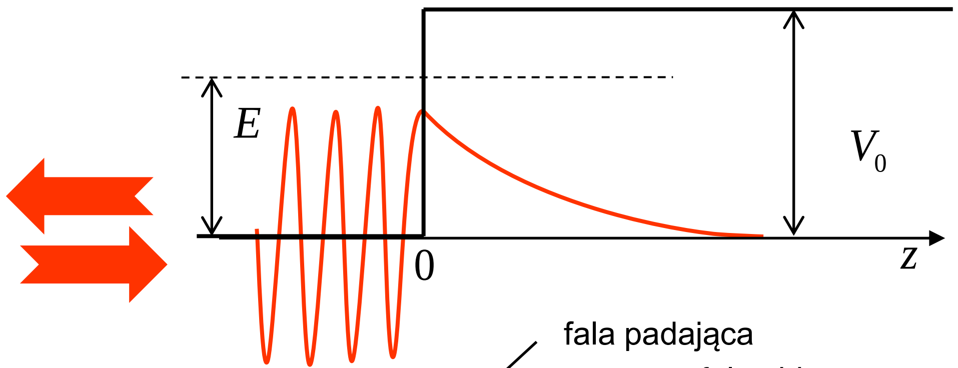




jelito myszy, różne markery:

actina	– czerwony
laminina	- zielony
jądro komórki	- niebieski

Schodek potencjału



cząstka pada od lewej strony na barierę potencjału. Oddzielnie wypisujemy r-nie Schrodingera dla obu obszarów

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + {k_1}^2\psi = 0$$

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} - {k_2}^2\psi = 0$$

$${k_1}^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} > 0,\ {k_2}^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} > 0$$

fala padająca

fala obita

$$\psi(z) = \begin{cases} Ae^{ik_1z} + Be^{-ik_1z} & \text{dla } z < 0 \\ Ce^{-k_2z} & \text{dla } z > 0 \end{cases}$$

penetracja bariery (fala ewanescencyjna)

Ciągłość f.f. i jej pochodnej

$$A + B = C$$

$$ik_1(A - B) = -k_2C$$

$$B = \frac{1 - i\frac{k_1}{k_2}}{1 + i\frac{k_1}{k_2}}$$

$$|B|^2 = |A|^2$$

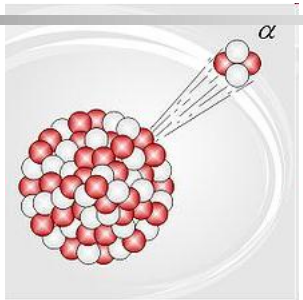
cząstka odbija się od schodka

głębokość wnikania $\cong 1/k_2$

analogia z całkowitym wewn. odbiciem (wykład 5)

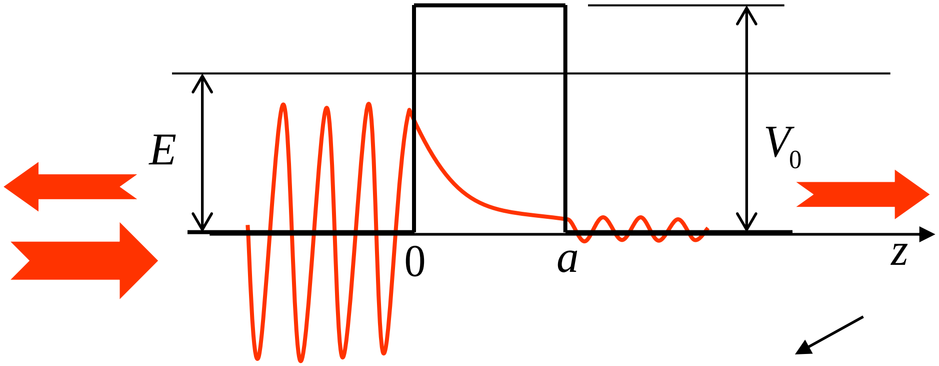
tunelowanie

1928 G. Gamov, emisja α



$$^{238}_{92}U \rightarrow ^{234}_{90}Th + ^{4}_{2}He^{2+}$$

$$\alpha \equiv ^{4}_{2}He^{2+}$$



rozwiązania: $\psi(z) = \begin{cases} Ae^{ik_1 z} + Be^{-ik_1 z} & \text{dla } z < 0 \\ Ce^{-k_2 z} & \text{dla } 0 < z < a \\ A'e^{ik_1 z} + B'e^{-ik_1 z} & \text{dla } z > a \end{cases}$

$$k_1{}^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$k_2{}^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$$

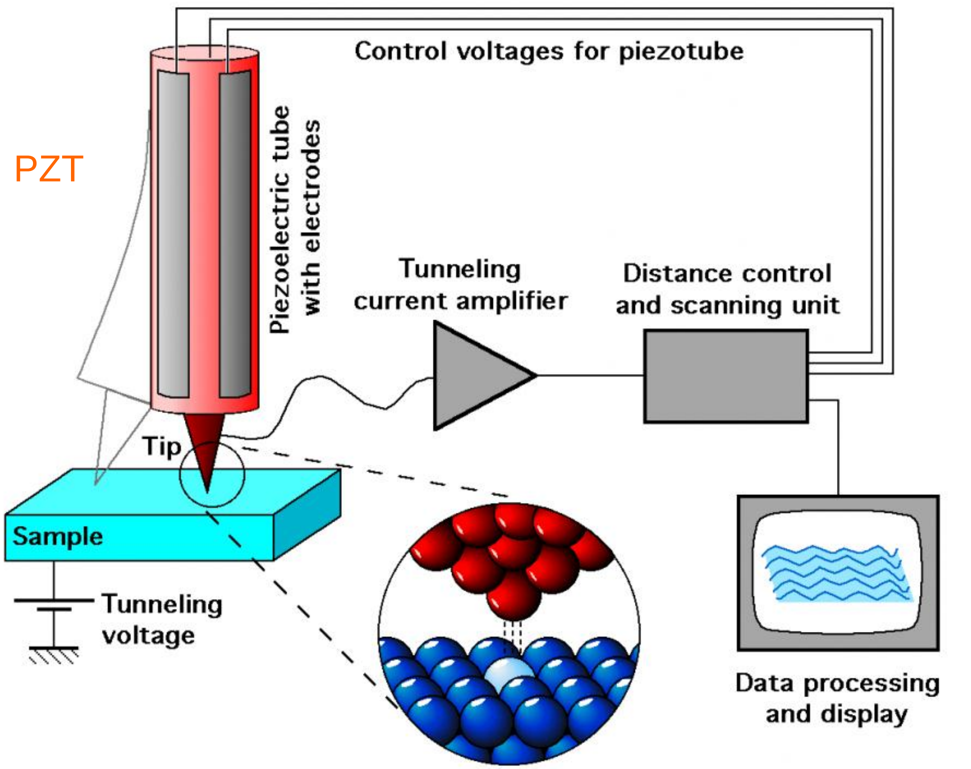
ciągłość f.f. i jej 1. pochodnej + rachunki...

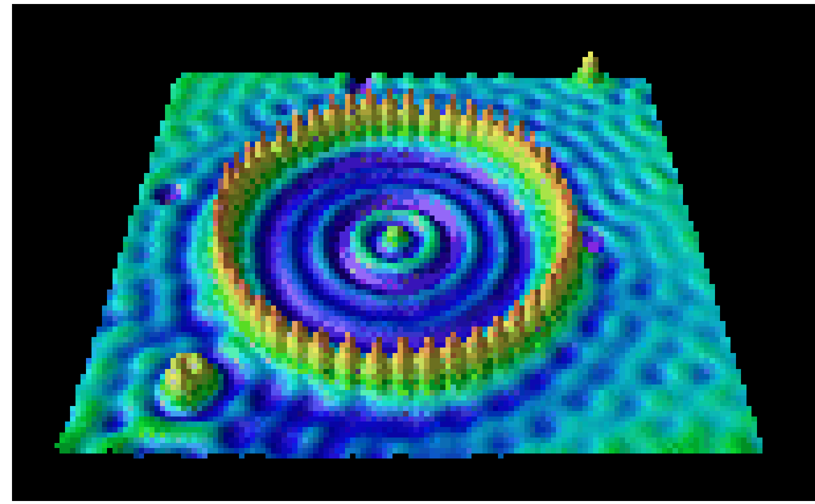
$$T = \left|\frac{A'}{A}\right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1}\right)^2 sinh^2(k_2 a)}$$

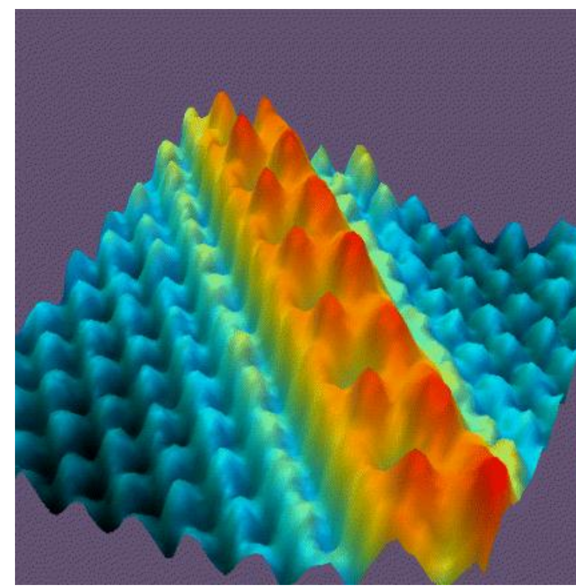
Słabe tunelowanie $k_2 a \gg 1$

$$T \cong 16\frac{E}{V_0}\left(1 - \frac{E}{V_0}\right)e^{-2k_2 a}$$

Scanning Tunelling Microscope (STM)





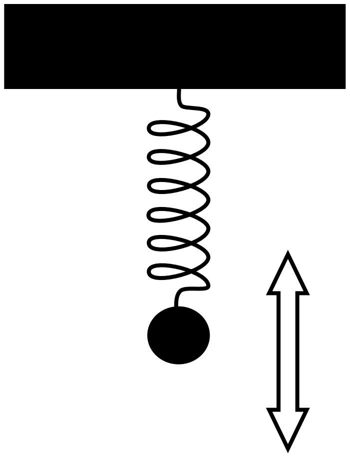


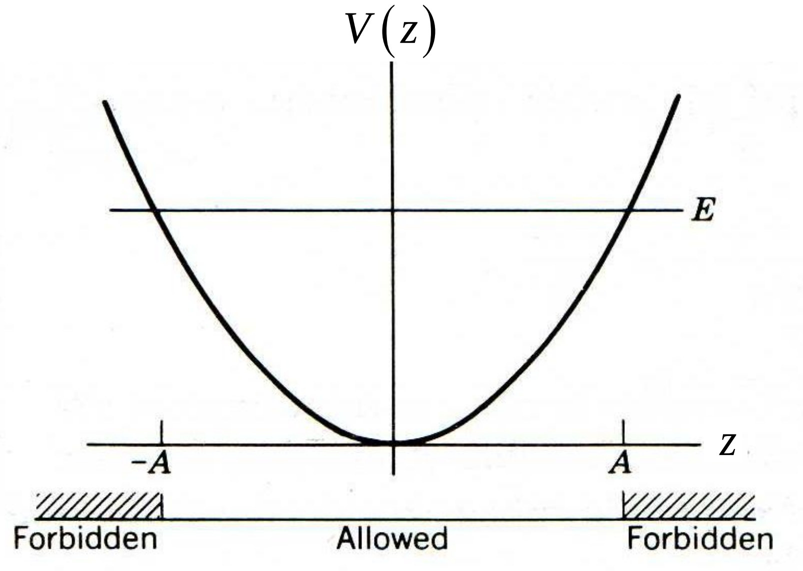
Czerwone - atomy Cs na GaAs (110) - niebieskie

1. generacja

4. generacja

oscylator harmoniczny, klasyczny





Potencjał i siła

$$V(z) = \frac{K}{2} z^2$$

$$F(z) = -\frac{dV}{dz} = -Kz$$

Równanie ruchu

$$m\frac{d^2 z}{dt^2} = -Kz$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 z = 0$$

$$\omega^2 = \frac{K}{m}$$

Rozwiązanie

$$z(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

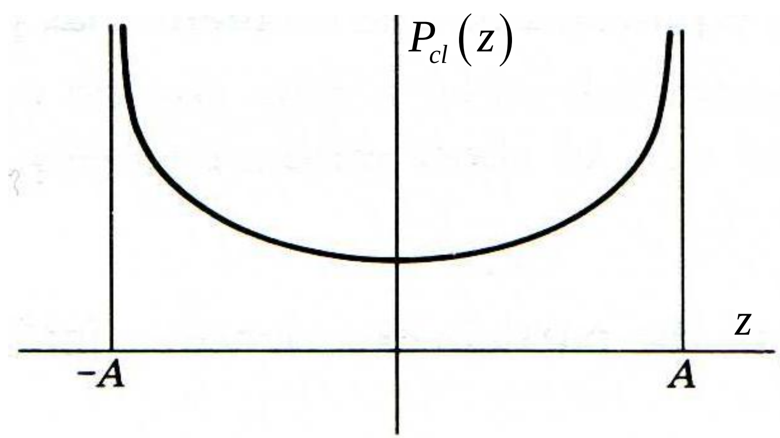
$$v(t) = -\frac{dz}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

energia

$$E = \frac{m}{2} v^2(t) + \frac{K}{2} z^2(t) = \frac{K}{2} A^2$$

gęstość prawdopodobieństwa

$$P_{cl}(z) = \frac{1}{\sqrt{A^2 - z^2}}$$



oscylator harmoniczny, kwantowy, 1

Równanie Schrodingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dz^2}+\frac{K}{2}z^2\psi=E$$

$$-\frac{d^2\psi}{dz^2}+\frac{\omega^2}{\hbar^2}z^2\psi=E$$

$$\frac{d^2\psi}{d\zeta^2}=(\zeta^2-\lambda)\psi$$

$$\zeta^2=\frac{m\omega}{\hbar},\qquad \lambda=\frac{2E}{\hbar\omega}$$

Potencjał i siła

$$V(z)=\frac{K}{2}z^2$$

rozwiązanie

$$\psi_n(\zeta)=H_n(\zeta)e^{-\zeta^2/2}$$

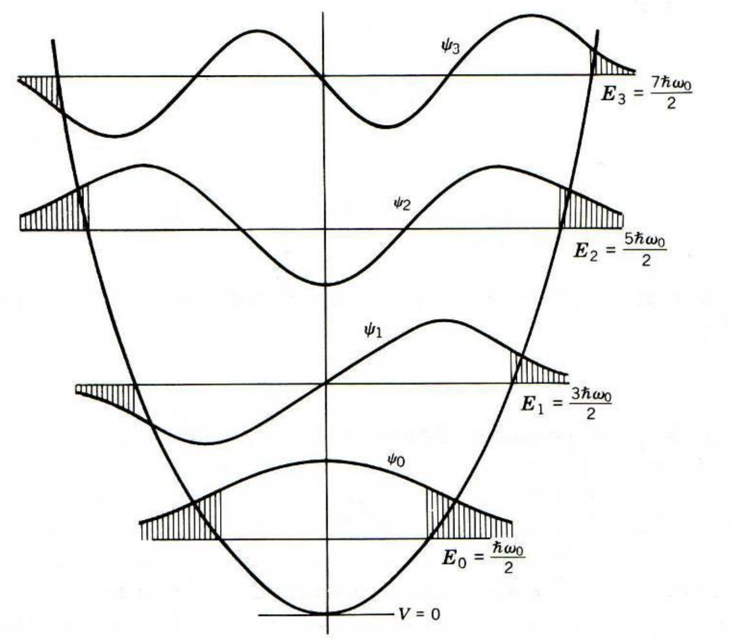
wielomian Hermite'a

energia

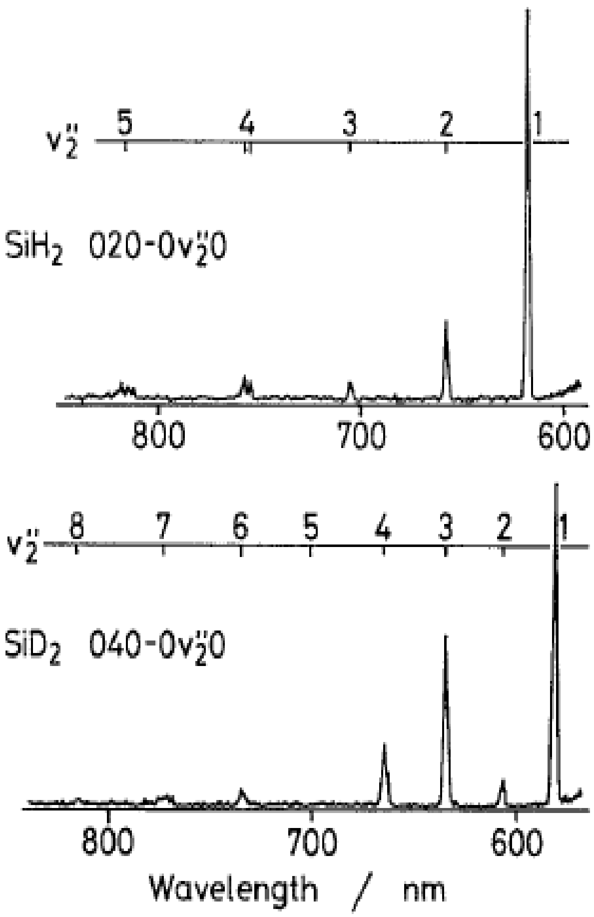
$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

Normalizacja

$$\int\psi_m(z)\psi_n dz=\delta_{mn}$$

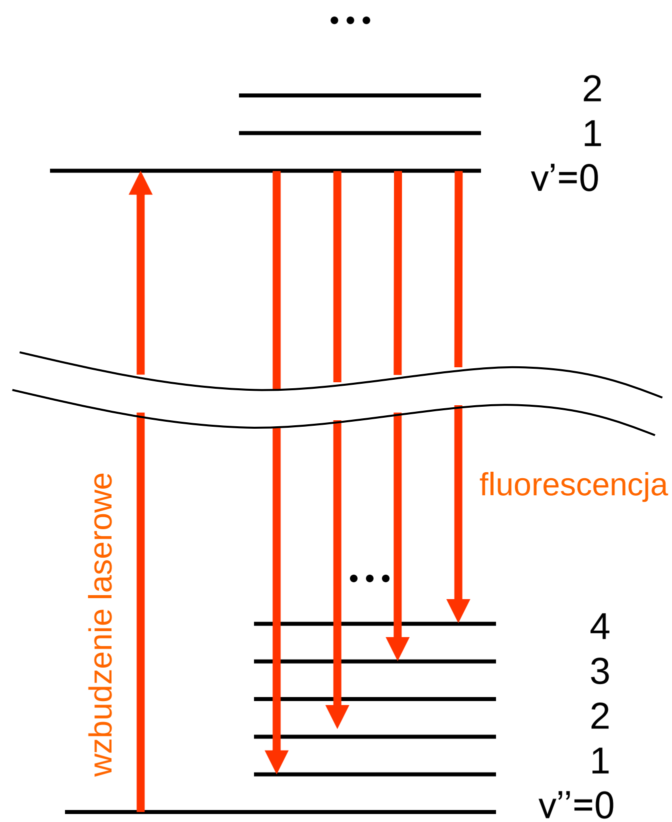


poziomy oscylacyjne cząsteczek, 1



SiH_2

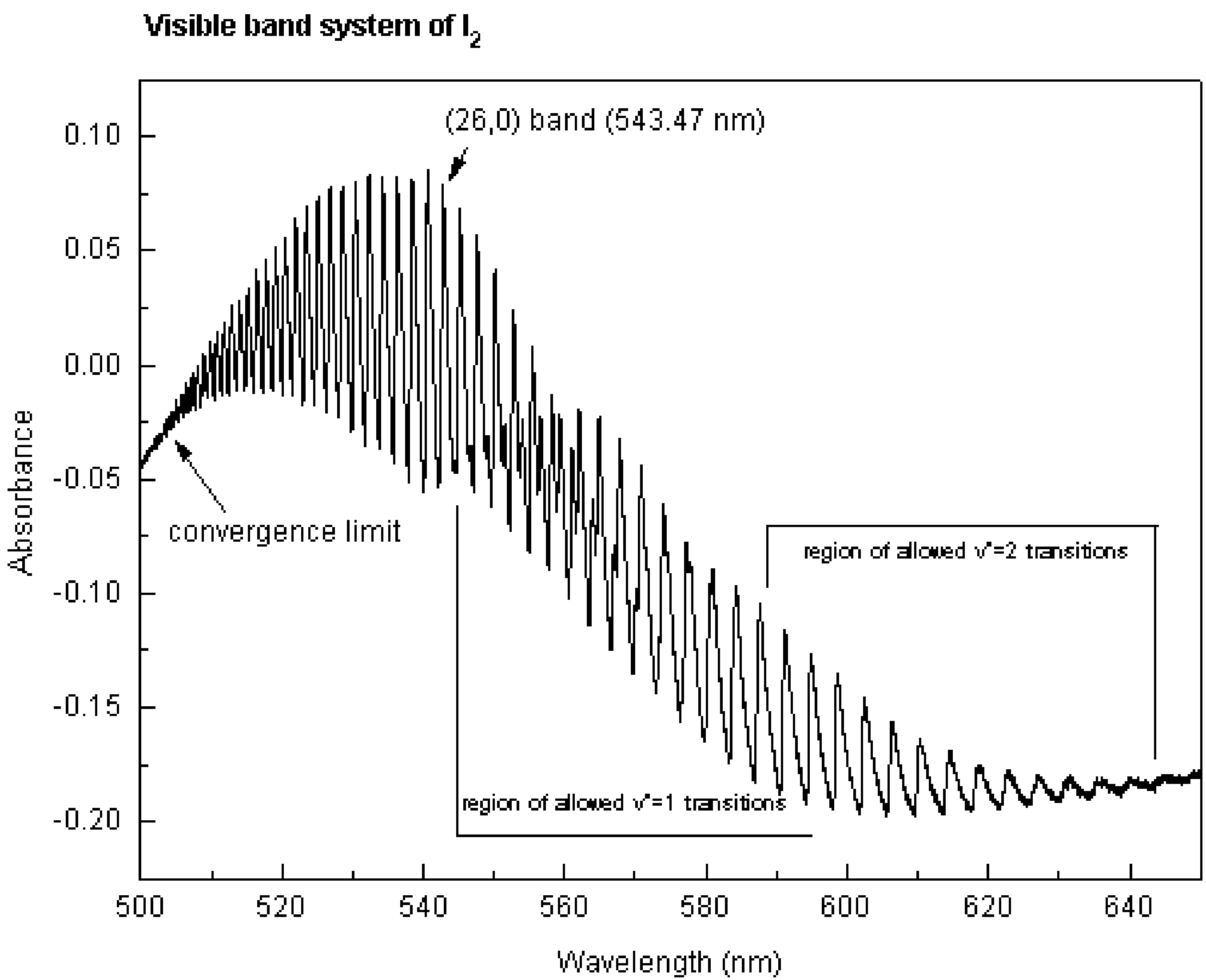
SiD_2



$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

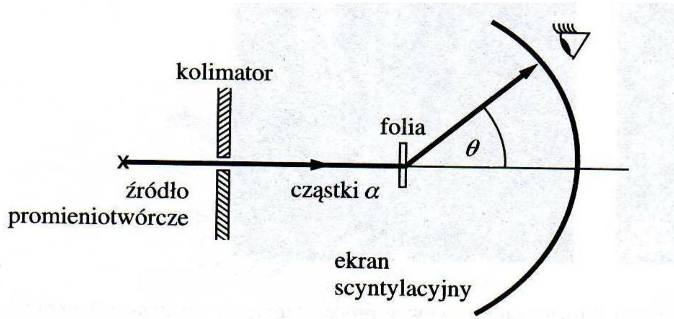
M. Fukushima, S. Mayama, and K. Obi, J.Chem.Phys. **96**, 44-52 (1992)

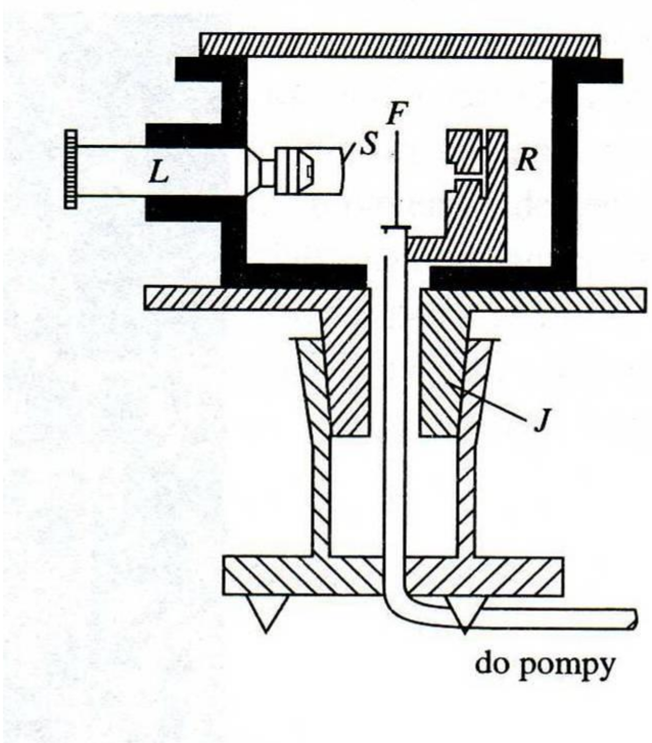
poziomy oscylacyjne cząsteczek, 2

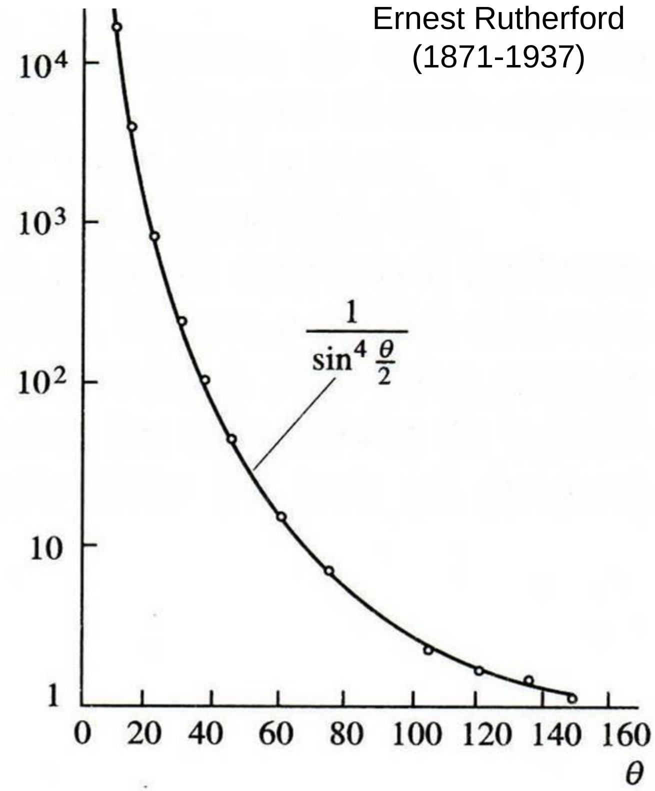


Doświadczenie Rutherforda, 1

1911

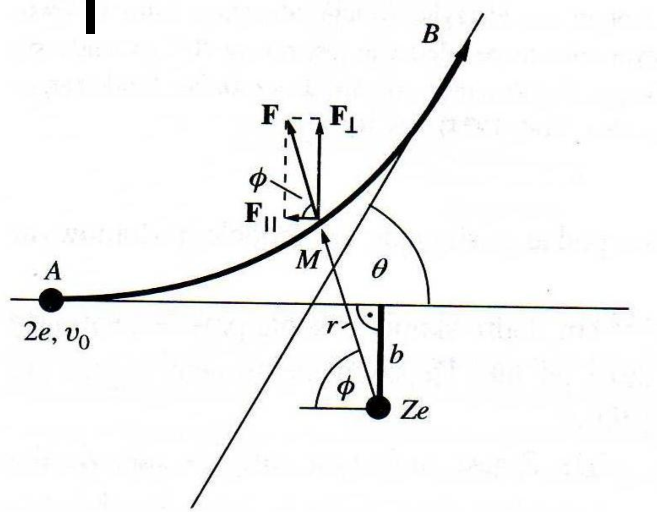






Ernest Rutherford
(1871-1937)

Doświadczenie Rutherforda, 2



1) siła:

$$\vec{F} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$
$$F_\perp = F\sin\phi$$
$$F_\parallel = F\cos\phi$$

2) zachowanie momentu pędu:

$$(mv_0 b)_A = \left(mr^2\frac{d\phi}{dt}\right)_M$$
$$\frac{1}{r^2} = \frac{d\phi}{dt}/v_0 b$$

z 1) i 2) mamy

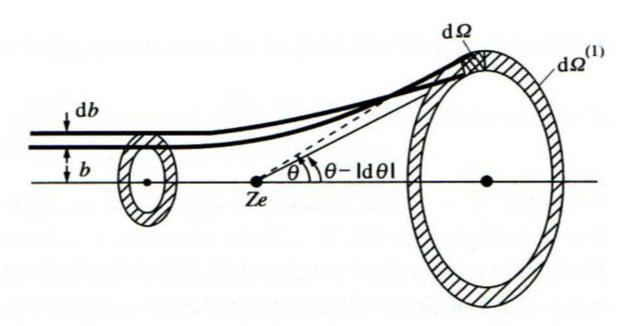
$$m\frac{dv_\perp}{dt} = F_\perp = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\sin\phi = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{v_0 b}\frac{d\phi}{dt}\sin\phi$$

$$\int_{t_A}^{t_B}\frac{dv_\perp}{dt}dt = \frac{\kappa}{mv_0 b}\int_{t_A}^{t_B}\sin\phi\frac{d\phi}{dt}dt\,, \qquad \kappa = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$$

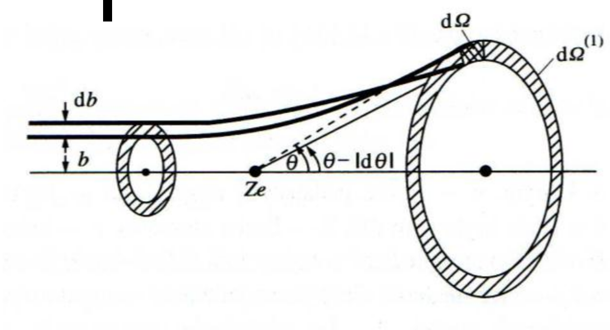
$$\int_0^{v_0\sin\Theta} dv_\perp = \frac{\kappa}{mv_0 b}\int_0^{\pi-\Theta}\sin\phi\, d\phi \Rightarrow v_0\sin\Theta = \frac{\kappa}{mv_0 b}(1+\cos\Theta)$$

…

$$b = \frac{\kappa}{m{v_0}^2}\cot(\Theta/2)$$



Doświadczenie Rutherforda, 3



$$b = \frac{\kappa}{m{v_0}^2}\cot(\Theta/2)$$

$$db = \frac{\kappa}{m{v_0}^2}\frac{1}{\sin^2(\Theta/2)}d\Theta$$

Różniczkowy przekrój czynny na rozpraszanie: $d\sigma = 2\pi b db$

Efektywna powierzchnia atomów w folii o grubości D, polu A oraz gęstości N to

$$dA = 2\pi bNDAdb$$

Procent rozproszonych cząstek α spośród n cząstek padających:

$$dn = n \cdot 2\pi bNDAdb$$

$$\boxed{\frac{dn}{n} = \frac{Z^2e^2DN}{(4\pi\epsilon_0)^2m^2{v_0}^4\sin^4(\Theta/2)}d\Omega}$$

kąt bryłowy

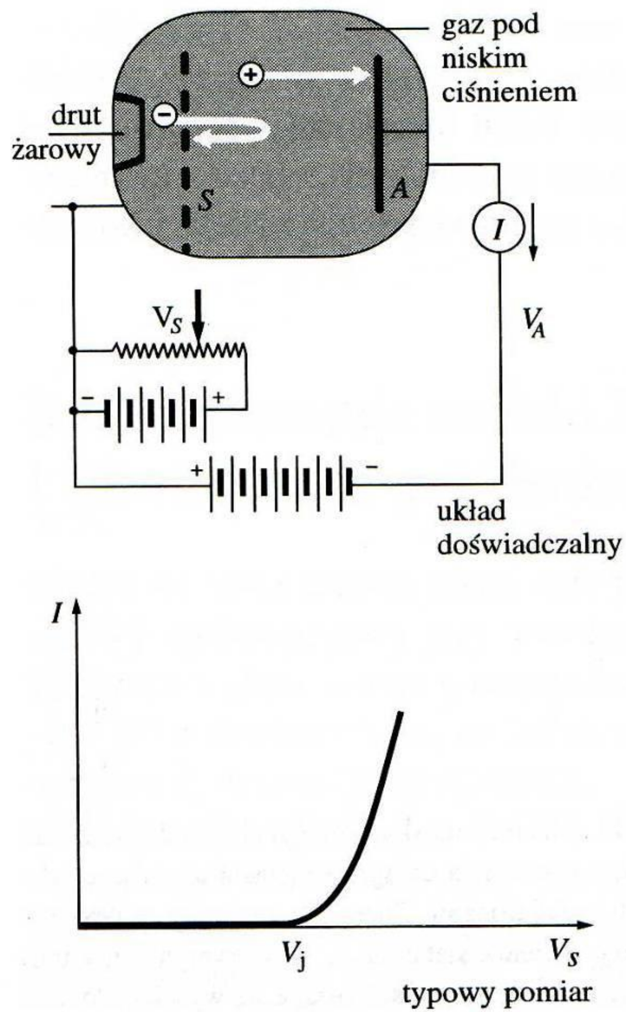
Promień jądra atomowego

$$R \cong 10^{-15}\mathrm{m}$$

atom jest pusty!

Doświadczenie Franka-Hertza

1902 Lenard



1913 Franck i Hertz