МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
УЗБЕКСКОЙ ССР

ТАШКЕНТСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И.ЛЕНИНА

 На правах рукописи

ТАДЖИБАЕВ Бахрам Рузиевич

УДК 517.98

НЕАССОЦИАТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА В ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБРАХ И ИХ АБСТРАКТНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ

01.01.01 – математический анализ

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук Ш.А.АЮПОВ

Ташкент – 1986

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Важное место в арсенале средств современной математической физики занимает теория алгебр операторов. Это обусловлено тем, что с помощью алгебр операторов, их состояний, представлений и групп автоморфизмов можно описывать и исследовать свойства различных систем квантовой статистической механики. Исторически сложилось так, что реализация этого описания осуществлялась преимущественно на W^* - алгебрах, введенных в работах Мюррея и Фон Неймана [49] ,[50] ,[51] . Отличительным свойством этих алгебр является их замкнутость в слабой операторной топологии. Эти алгебры также называются алгебрами Фон Неймана. Сущность алгебраического подхода заключается в том, что квантовые наблюдаемые отождествляются с самосопряженными операторами, а состояния с линейными функционалами на W^*-алгебре, принимающими положительные значения на положительных элементах алгебры, причем значение, принимаемое на единичном операторе равно единице. Обычное ассоциативное произведение $T \cdot S$ двух самосопряженных операторов T и S не является, вообще говоря, самосопряженным оператором. Этому произведению в отличие от йорданова произведения $T \circ S = \frac{1}{2}(T \cdot S + S \cdot T)$ трудно придать какой-либо физический смысл (см. [36]). В связи с этим, рассмотрение алгебр Фон Неймана мотивируется не столько физическими соображениями, сколько удобством их использования в реализации задач технического характера.

В настоящее время теория алгебр Фон Неймана является глубоко разработанным разделом теории операторных алгебр (см. [55], [60]).

В [57] И.Е.Сигалом была рассмотрена алгебра неограниченных операторов $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$, присоединенных к алгебре Фон Неймана $\mathfrak{A}$. В этой же работе были введены пространства интегрируемых и интегрируемых с квадратом измеримых операторов и дано доказательство полноты этих пространств.

Значительным вкладом в дальнейшее развитие идей работы [57], явились результаты В.И.Овчинникова [27],[28], Э. Нельсона [52], Ф.Дж. Иедона [62], Н.В.Трунова [32], которые существенно пополнили запас нормированных подпространств в кольце $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$. В [24], [25] М.А.Муратов разработал общую теорию некоммутативных идеальных нормированных пространств и построил их примеры (некоммутативные пространства Орлича, Марцинкевича, Лоренца). Все перечисленные представители идеальных пространств являются банаховыми и содержатся в классе симметричных пространств, который рассматривался В.И.Овчинниковым в [27], [28].

В работах В.И.Чилина был предложен общий подход к решению задачи об абстрактной характеризации упомянутых выше классов банаховых пространств в $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$. Так например, в [33], [34], [35] с помощью введенного понятия банахова упорядоченного $*$ -алгеброида, было дано абстрактное описание идеальных пространств, некоммутативных L_p - пространств (см. [62]) и пространств Орлича измеримых операторов. При этом была существенно использована теория бэровских $*$ -алгебр и их представлений (см. [31]).

Настоящая работа примыкает к указанному кругу вопросов и посвящена построению пространств Орлича на йордановых банаховых алгебрах и их абстрактному описанию.

Начало развитию теории йордановых банаховых алгебр было положено в середине 60-х годов и связано с работами Топпинга [61] и Штёрмера [59]. В этих работах впервые был рассмотрен класс JW - алгебр, т.е. слабо замкнутых йордановых алгебр самосопряженных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве, которые являются неассоциативным вещественным аналогом алгебр фон Неймана. Но особенно бурный подьем в теории йордановых банаховых алгебр, наметился после появления работ Альфсена, Шульца, Штёрмера [37] и Шульца [56] (были введены JB и JBW - алгебры).

В работах Ш.А.Аюпова был разработан метод интегрирования по конечному следу на йордановых банаховых алгебрах. В [12] им были введены и изучены аналоги пространств L_1 и L_2, которые инъективно вложены в OJ - алгебру $\hat{A}$ (упорядоченную йорданову алгебру [6],[30]) измеримых элементов для JBW - алгебры A. Эти результаты были обобщены на полуконечный случай в работе Бердикулова М.А. [14]. Следует отметить, что в теории неассоциативного интегрирования OJ - алгебры измеримых элементов играют такую же роль, как и кольца неограниченных операторов в теории алгебр фон Неймана.

Дальнейшие исследования, проведенные Р.З.Абдуллаевым, существенно пополнили общую теорию новыми классами банаховых пространств в OJ - алгебре $\hat{A}$. В [1], [2], [3] им были рассмотрены неассоциативные аналоги пространств $L_p \; (p \in (0,\infty))$, которые реализуются измеримыми элементами из $\hat{A}$. Эти пространства являются полными нормированными пространствами и играют важную роль в приложениях.

По мере совершенствования методов и накопления опыта в исследовании задач теории неассоциативного интегрирования, появилась возможность расширить арсенал имеющихся банаховых пространств в $\hat{A}$.

В связи с вышесказанным представляется актуальным построение и абстрактное описание пространств Орлича измеримых элементов для JBW - алгебр. Перечислим основные проблемы, исследуемые в настоящей диссертации.

а) Построение и описание различных классов пространств Орлича $L_M^*(A)$ для JBW - алгебры A с конечным следом τ .

б) Изучение свойств линейного интегрального оператора на пространстве Орлича $L_M^*(A)$ и выяснение условий непрерывности и полной непрерывности этого оператора.

в) Разработка общего подхода к абстрактному описанию банаховых подпространств в OJ - алгебре $\hat{A}$.

г) Абстрактная характеризация неассоциативных пространств L_p и пространств Орлича $L_M^*(A)$.

Ввиду ряда причин (неприменимость конструкции Гельфанда-Наймарка-Сигала, отсутствие аналогов ряда важных результатов из теории бэровских $*$ - алгебр и др.), при решении указанных задач возникает значительное число трудностей, характерных для теории неассоциативного интегрирования.

В некоторых случаях, используется метод исследования пространств Орлича для JW - алгебр с помощью обертывающей алгебры фон Неймана, разработанный в работах Ш.А.Аюпова. В доказательстве некоторых результатов использованы методы, отличные от случая алгебр фон Неймана (например, в абстрактном описании пространств L_p ($p \in [1, \infty)$) и пространств Орлича). Эти методы являются новыми и в случае алгебр фон Неймана.

Диссертационная работа состоит из введения, сводки предварительных сведений, двух глав, разбитых на девять параграфов и списка литературы.

Перейдем к краткому обзору основных результатов диссертации.

В § 0 приведены необходимые сведения из теории упорядоченных йордановых алгебр, йордановых банаховых алгебр (JB и JBW - алгебр) и алгебр фон Неймана, и теории неассоциативных пространств L_p .

В частности, для каждого ненулевого элемента a OJ - алгебры $\hat{A}$ вводится функция $\tilde{a}(\alpha)$, которая называется перестановкой элемента a . Здесь же доказаны основные свойства функции $\tilde{a}(\alpha)$.

В первой главе рассматриваются различные классы пространств Орлича на йордановых банаховых алгебрах и изучаются свойства линейных операторов в них.

В § I.I рассматривается JBW - алгебра A с точным, нормальным, конечным следом τ . Обозначим через $\hat{A}$ OJ - алгебру всех измеримых элементов для A .

О п р е д е л е н и е I.I.9. Линейное подпространство E в $\hat{A}$ называется идеальным, если выполнены следующие условия:

I) если $a \in E$, $a' \in \hat{A}$, $|a'| \leq |a|$, то $a' \in E$;

II) если $a \in E$, $b \in A$, то $a \cdot b \in E$,

где $|a| = \sqrt{a^2}$ - модуль элемента a .

Если, кроме того на E задана норма $\|\cdot\|_E$ со свойствами:

(i) $\|b\|_E \le \|a\|_E$ при $|b| \le |a|$, $b, a \in E$,

(ii) $\|ba\|_E \le \|b\|_\infty \|a\|_E$, $a \in E$ и $b \in A$, то E называется нормированным идеальным пространством (сокращенно НИП) на A. Полное по норме НИП E в $\hat{A}$ называется банаховым идеальным пространством (сокращенно БИП) на A.

Говорят, что в НИП E выполнено условие (B), если из $0 \le a_n \uparrow$, $a_n \in E$ $(n \in \mathbb{N})$, $\sup\limits_{n \ge 1} \|a_n\|_E < \infty$ следует, что существует такой $a \in E$, что $a_n \uparrow a$.

Предложение I.I.I3 Пусть E НИП в $\hat{A}$. Если в E выполнено условие (B), то E полно по норме.

Классические пространства Орлича измеримых функций на пространстве с мерой введены Орличем в работах [53] ,[54] и впоследствии изучались Зигмундом [I9] , Люксембургом [48] , Грибановым [I6] , Динкуляну [4I] ,[42] и другими. Систематическое изложение теории пространств Орлича измеримых функций имеется в монографии М.А.Красносельского и Я.Б.Рутицкого [23] .

В § I.2 вводятся и изучаются класс $L_M(A)$ и пространство Орлича $L^*_M(A)$ измеримых относительно JBW - алгебры A элементов. Эти пространства $L^*_M(A)$ строятся по $\mathcal{N}$ - функции $M(u)$ и доказывается их полнота относительно нормы Орлича $\|\cdot\|_M$.

Для случая обратимой JW - алгебры имеет место следующий результат:

Теорема I.2.8 Пусть A - обратимая JW - алгебра с точным нормальным конечным следом τ , а $E(A)$ $\mathfrak{O}\mathfrak{I}$ - алгебра всех самосопряженных операторов, присоединенных к A . Через $\mathfrak{A}(A)=\mathfrak{A}$ обозначим обертывающую алгебру фон Неймана для A , а через τ' точный нормальный конечный след на $\mathfrak{A}$, который является продолжением следа τ . Тогда:

(i) $L_M(A)=L_M(\mathfrak{A})\cap E(A)$;

(ii) $L_M^*(A)=L_M^*(\mathfrak{A})\cap E(A)$;

(iii) $\|a\|_M^A=\|a\|_M^{\mathfrak{A}}$ для всякого $a\in L_M^*(A)$,

где $\|a\|_M^A$, $\|a\|_M^{\mathfrak{A}}$ нормы Орлича элемента a в $L_M^*(A)$ и $L_M^*(\mathfrak{A})$ соответственно.

Напомним, что N - функция $M(u)$ удовлетворяет (Δ_2) - условию, если существуют постоянные $k>0$ и $u_0\geq 0$ такие, что $M(2u)\leq kM(u)$ при $u\geq u_0$ (см. [23] , стр. 35).

В § I.3 рассматриваются пространства Орлича, порожденные N - функцией $M(u)$, удовлетворяющей условию (Δ_2) . Указывается ряд эквивалентных условий, при которых пространство Орлича $L_M^*(A)$ принадлежит данному классу:

Т е о р е м а I.3.2 Следующие условия эквивалентны:

(i) функция $M(u)$ удовлетворяет (Δ_2) условию ;

(ii) $L_M^*(A)=L_M(A)$;

(iii) $L_M(A)$ - линейное множество ;

(iv) $L_M(A) = E_M(A)$, где $E_M(A)$ - замыкание JBW - алгебры A по норме Орлича $\|\cdot\|_M$.

В § I.4 рассматривается неассоциативный аналог линейного интегрального оператора $K_R(\cdot) = M_{L_1(A)}(R(\cdot))$ на пространстве Орлича $L_M^*(A)$. Сформулированы и доказаны необходимые, а также достаточные условия непрерывности и полной непрерывности этого оператора. В доказательстве полной непрерывности оператора $K_R(\cdot)$ используется следующая лемма о сепарабельности пространства Орлича.

Лемма I.4.2 Пусть $\mathfrak{A}$ - алгебра фон Неймана в сепарабельном гильбертовом пространстве H, τ - точный нормальный конечный след на $\mathfrak{A}$, $E_M(\mathfrak{A})$ - замыкание $\mathfrak{A}$ в $L_M^*(\mathfrak{A})$ по норме Орлича $\|\cdot\|_M$, тогда $E_M(\mathfrak{A})$ - сепарабельное множество.

Параграф I.5 посвящен построению и описанию пространств Орлича $L_\Phi(A)$, которые порождаются выпуклой функцией $\Phi(\cdot)$ (обобщенные пространства Орлича). Этот класс пространств включает в себя все рассмотренные ранее классы пространств Орлича.

Напомним, что норма $\|\cdot\|$ на пространстве Ω порядково непрерывна (монотонно полна), если $\|a_n\| \to 0$ для любой последовательности $a_n \downarrow 0$, $a_n \in \Omega$ (соответственно выполнено условие (B)).
Доказано, что обобщенные пространства Орлича $L_\Phi(A)$ являются банаховыми пространствами и удовлетворяют условию монотонной полноты и порядковой непрерывности нормы $\|\cdot\|_\Phi$.

Во второй главе диссертации вводится понятие банахова упорядоченного монотонно полного йорданова алгеброида, посредством которого дано абстрактное описание некоторых классов банаховых пространств OJ - алгебры $\hat{A}$.

Приведем основные результаты второй главы.

В § II.I вводится понятие банахова упорядоченного йорданова алгеброида (J - алгеброида) $(E, \|\cdot\|_E)$, как полного по норме $\|\cdot\|_E$ действительного векторного пространства с некоторыми дополнительными условиями.
Основным результатом этого параграфа является теорема II.I.7 о существовании нормы $\|\cdot\|_\infty$, заданной на совокупности ограниченных элементов A из $(E, \|\cdot\|_E)$, такой, что A превращается в JB - алгебру (йорданову банахову алгебру).

Дальнейшему исследованию упорядоченных J - алгеброидов посвящен параграф II.2.

Определение II.2.I. Упорядоченный J -алгеброид E называется монотонно полным, если для любой возрастающей и ограниченной сверху сети $\{x_\alpha\}_\alpha$ элементов из E в E существует точная верхняя грань $x = \sup\limits_\alpha x_\alpha$.

Предложение II.2.4 Если (E, e) банахов упорядоченный, монотонно полный J - алгеброид с порядково непрерывной нормой, то JB - алгебра A ограниченных относительно слабой единицы e элементов из E, является модулярной JBW - алгеброй счетного типа.

В [47] Г.Е. Лэсеем было дано абстрактное описание классических функциональных пространств L_p, а В.Д.Клаас и А.С.Заанен в [40] получили абстрактное описание функциональных пространств Орлича. Последние два параграфа второй главы посвящены абстрактной характеризации неассоциативных пространств L_p и обобщенных пространств Орлича, соответственно.

В § II.3 доказано, что если $(E, \|\cdot\|_E)$ - банахов упорядоченный, монотонно полный J - алгеброид, норма которого обладает свойством p - аддитивности, то существует JBW - алгебра A счетного типа, такая, что E изометрически и порядково изоморфно $L_p(A)$ для некоторого p из $[1, \infty)$.

Доказательству аналогичного результата для пространств Орлича посвящен параграф II.4.

Следует также отметить, что важным результатом § II.3 является теорема о существовании следа на OJB - алгебре A с заданной на ней p - аддитивной нормой.

Результаты диссертации являются прямым обобщением соответствующих классических результатов. В то же время следует отметить, что пространства L_p и пространства Орлича измеримых элементов, так же как и все идеальные подпространства в OJ - алгебре $\hat{A}$ не являются решетками в случае, когда $\hat{A}$ неассоциативна. Это обстоятельство играет решающую роль при рассмотрении таких пространств и делает, как правило, невозможным применение методов, используемых при рассмотрении пространств Орлича измеримых функций.

Основные результаты диссертации, выносящиеся на защиту:

- построены различные классы пространств Орлича $L^*_M(A)$ относительно точного нормального конечного следа на JBW -

алгебре A , которые реализуются измеримыми элементами;

- рассмотрен неассоциативный аналог линейного интегрального оператора $K_{R}(\cdot)$ на пространстве Орлича $L^{*}_{M}(A)$ а также указаны необходимые и достаточные условия, при которых $K_{R}(\cdot)$ является непрерывным и вполне непрерывным оператором;

- разработан метод абстрактной характеризации банаховых пространств в OJ - алгебре $\hat{A}$;

- с помощью введенного понятия банахова упорядоченного йорданова алгеброида дано абстрактное описание неассоциативных пространств L_p и обобщенных пространств Орлича.

Результаты и методы, представленные в диссертации, могут быть использованы при исследовании операторных алгебр и при решении задач квантовой теории вероятностей.

Результаты диссертации докладывались на городском семинаре при кафедре функционального анализа в ТашГУ им.В.И.Ленина (1984 - 1986 гг.), на семинаре 'Теория упорядоченных алгебр и ее приложение в квантовой теории вероятностей при отделе функционального анализа Института математики АН УзССР (1985 г.), на ежегодных конференциях молодых ученых ТашГУ (1984 - 1986 гг.), на конференциях молодых ученых Института математики АН УзССР (1984, 1985 гг.) на ХУШ Воронежской зимней математической школе (1984 г.)

Основное содержание диссертации отражено в четырех работах [66] ,[67],[68] ,[69] . Общий объем работы 126 страниц машинописного текста. Библиография включает 69 наименований.

Выражаю глубокую признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук Ш.А.Алимову за постоянное внимание и помощь при написании этой работы.

§ 0. Предварительные сведения.

В этом параграфе приводятся необходимые для дальнейшего изложения сведения о йордановых алгебрах и алгебрах фон Неймана.

I. Упорядоченные йордановы алгебры.

Определение 0.I ([I8]) Векторное пространство A над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ называется йордановой алгеброй, если в A определена операция умножения элементов, так что

1. $xy = yx$;
2. $(x^2 y)x = x^2(yx)$;
3. $(x+y)z = xz + yz$;
4. $\alpha(xy) = (\alpha x)y$

для произвольных x, y, z из A и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Как видно из определения, произведение элементов в йордановой алгебре вообще говоря неассоциативно.

Для элемента $a \in A$ определим оператор R_a умножения на $a : R_a x = ax$, $x \in A$. Элементы $a, b \in A$ называются операторно коммутирующими, если коммутируют операторы R_a и R_b , т.е. $(ac)b = a(cb)$ для всех $c \in A$. Подалгебра A_0 йордановой алгебры A называется сильно ассоциативной, если в ней любые два элемента операторно коммутируют. Семейство элементов $\mathfrak{M}$ из A назовем совместным, если йорданова подалгебра алгебры A , порожденная этим семейством $\mathfrak{M}$ сильно ассоциативна. Совместность двух элементов $a, b \in \mathfrak{M}$ будем обозначать $a \leftrightarrow b$.

Из вышесказанного нетрудно заключить, что каждый элемент йордановой алгебры A совместен с самим собой и поэтому имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 0.2 ([I8]) Всякая однопорожденная подалгебра йордановой алгебры является сильно ассоциативной. Центром йордановой алгебры A называется множество элементов, совместных со всеми элементами A, т.е. пересечение всех максимальных сильно ассоциативных подалгебр в A.

Частичный порядок „$\leq$" на йордановой алгебре A назовем согласованным с алгебраическими операциями, если

I. $a \geqslant b \Rightarrow a+c \geqslant b+c, \ \forall a,b,c \in A$;

2. $a \geqslant b \Rightarrow \lambda a \geqslant \lambda b, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geqslant 0$ и $a,b \in A$;

3. $a \geqslant \theta, b \geqslant \theta, a \leftrightarrow b \Rightarrow ab \geqslant \theta$;

4. $a^2 \geqslant \theta, \ \forall a \in A$.

Здесь θ - нулевой элемент йордановой алгебры A.

О п р е д е л е н и е 0.3 ([6,30]) Йорданова алгебра A с единицей (обозначаемой $\mathbb{1}$) называется OJ - алгеброй, если на ней задан частичный порядок, согласованный с алгебраическими операциями и удовлетворяющий следующим двум условиям:

(I) если $\{x_\alpha\}_\alpha$ возрастающая и порядково ограниченная сверху сеть элементов из A, то существует $x = \sup_\alpha x_\alpha$ (монотонная полнота), причем $x \leftrightarrow y$, если $x_\alpha \leftrightarrow y$ для всех α;

(2) всякая максимальная сильно ассоциативная подалгебра A_0 в A является векторной решеткой относительно индуцирован-

ного частичного порядка.

Элемент a OJ - алгебры A будем называть ограниченным, если существует $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$ такое, что $-\lambda \mathbb{1} \leq a \leq \lambda \mathbb{1}$.

Через ∇ обозначим совокупность всех идемпотентов (т.е. таких элементов e, что $e^2 = e$) OJ - алгебры A. Тогда из [31] следует, что ∇ является полной решеткой и логикой относительно индуцированного частичного порядка и ортодополнения $e^{\perp} = \mathbb{1} - e$.

Символами $\vee$ и $\wedge$ мы будем обозначать точную верхнюю и точную нижнюю грани идемпотентов из ∇.

OJ - алгебра A называется модулярной, если логика ее идемпотентов ∇ дедекиндова, т.е. выполняется равенство

$(f \vee g) \wedge h = f \vee (g \wedge h)$ для всех $f, g, h \in \nabla$, $f \leq h$.

Семейство $\{e_\lambda\}$ из ∇ $(\lambda \in \mathbb{R})$ называется спектральным, если выполняются следующие условия:

(1) $e_\lambda \leq e_\mu$ при $\lambda \leq \mu$;

(2) $\inf\limits_\lambda e_\lambda = \theta$, $\sup\limits_\lambda e_\lambda = \mathbb{1}$;

(3) $e_\lambda = \sup\limits_{\mu < \lambda} e_\mu$ для всех λ.

Из условия (1) вытекает, что любые два идемпотента из спектрального семейства сравнимы и, следовательно, совместны (см. [31] предложение 2 из § 3). Поэтому существует максимальная сильно ассоциативная подалгебра A_0 из OJ -алгебры A, содержащая данное спектральное семейство.

Так как A_0 является полуполем [31], то $\{e_\lambda\}$ - спектральное семейство в полуполе A_0.

Т е о р е м а 0.4 ([7] спектральная теорема). Для каждого элемента x OJ - алгебры A существует в точности одно спектральное семейство $\{e_\lambda\}$ в A такое, что $x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lambda\, de_\lambda$, причем $\{e_\lambda\}$ содержится во всякой сильно ассоциативной подалгебре, содержащей x. $\{e_\lambda\}$ - называется спектральным семейством элемента x, а $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lambda\, de_\lambda$ - его спектральным разложением.

При помощи этой теоремы можно в OJ - алгебре A, как и в полуполе, ввести понятия x_+ - положительной части элемента x, x_- - отрицательной части x, т.е.

$x_+=x\vee\theta$, $x_-=(-x)\vee\theta$, а также модуля элемента x из $A: |x|=x_+ + x_-$, причем $x=x_+-x_-$.

Более того, из теоремы 0.4 следует, что если $\{e_\lambda\}$ - спектральное семейство для x, то $x_+=\int\limits_{0}^{+\infty}\lambda\, de_\lambda$.

$$x_-=-\int\limits_{-\infty}^{0}\lambda\, de_\lambda,\ |x|=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\lambda|\, de_\lambda.$$

Спектральное разложение позволяет определить элемент $f(x)$ для любой непрерывной функции $f(\lambda)$ на вещественной оси по формуле:

$$f(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)\, de_\lambda \qquad \text{(см. [17] стр. 362)}$$

В заключение этого раздела мы дадим некоторые понятия, касающиеся свойств элементов OJ - алгебры A.

Т е о р е м а 0.5 ([3I]) Для любого элемента a из OJ - алгебры A существует наименьший идемпотент e обладающий свойством $ea = a$. Этот идемпотент обозначим $S(a)$ и назовем носителем элемента a .

Отметим некоторые свойства носителя.

Т е о р е м а 0.6 ([3I])

I. $S(a)$ совместен с любым элементом, совместным с a ;

2. $S(a) = S(a^2) = S(|a|) = S(\lambda a)$, где $\lambda \neq 0, \lambda \in R$;

3. если $e^2 = e$, то $ea = \theta$, тогда и только тогда, когда $eS(a) = \theta$;

4. если $S(a) \cdot S(b) = \theta$, то $ab = \theta$.

Пусть теперь a произвольный элемент OJ -алгебры A Так как a лежит в некоторой максимальной сильно ассоциативной подалгебре A_o , и A_o является полуголем, то в A_o существует симметрия s (т.е. $s^2 = 1\!\!1$) такая, что $a = |a| s$, $s = S(a_+) - S(a_-) + [S(a)]^\perp$. Представление a в виде $|a| \cdot s$ называется полярным разложением элемента a .

2. Йордановы банаховы алгебры.

О п р е д е л е н и е 0.7 ([37]) Вещественное банахово пространство A , являющееся одновременно йордановой алгеброй с единицей $1\!\!1$, называется йордановой банаховой алгеброй или JB - алгеброй, если (i) $\|x^2\| = \|x\|^2$,: (ii) $\|x^2\| \leq \|x^2 + y^2\|$ для всех $x, y \in A$.

JB - алгебра A называется OJB - алгеброй, если она является OJ - алгеброй относительно частичного порядка, определяемого конусом

$$A_+ = \{ a^2 , \ a \in A \} .$$

Отметим, что совокупность ограниченных элементов произвольной OJ - алгебры является OJB - алгеброй относительно нормы:

$$\|a\|_\infty = \inf \{ \lambda > 0 : -\lambda \mathbb{1} \leq a \leq \lambda \mathbb{1} \} .$$

Теорема 0.8 ([31]) Если A_0 - замкнутая ассоциативная подалгебра JB - алгебры A, содержащая единицу $\mathbb{1}$, то A_0 изометрически, порядково и алгебраически изоморфна алгебре $C(X)$ всех непрерывных действительных функций на некотором компактном хаусдорфовом пространстве X.

Определение 0.9 ([56]) JB - алгебра A называется JBW - алгеброй, если существует банахово пространство N называемое предсопряженным к A, такое, что A изометрически изоморфно пространству N^*, сопряженному к N.

Всякая JBW - алгебра является OJB - алгеброй.

Для того, чтобы сформулировать один из основных результатов работы [56], дающий другое эквивалентное определение JBW - алгебры, нам понадобятся несколько понятий. Положительный линейный функционал ρ на JB - алгебре A называется состоянием, если $\rho(\mathbb{1})=1$. Линейный функционал ρ называется нормальным, если для любой сети $\{x_\alpha\} \subset A$, монотонно убывающей к нулю, $\rho(x_\alpha) \longrightarrow 0$.

Говорят, что JB - алгебра A обладает разделяющим семейством нормальных состояний, если для любого $a \in A_+$, $a \neq \theta$ существует нормальное состояние ρ на A такое, что $\rho(a) > 0$. JB - алгебра A называется монотонно полной, если для любой возрастающей и ограниченной сверху сети $\{x_\alpha\}$ из A в A существует точная верхняя грань $x = \sup\limits_\alpha x_\alpha$.

Т е о р е м а 0.I0 Пусть A - JB - алгебра. Тогда A обладает предсопряженным пространством (т.е. является JBW - алгеброй) тогда и только тогда, когда она монотонно полна и имеет разделяющее семейство нормальных состояний. Если одно из этих эквивалентных условий выполнено, то предсопряженное к A пространство единственно и может быть отождествлено с пространством N всех нормальных линейных функционалов на A (в естественной двойственности между A и $N \subset A^*$).

Любая JW - алгебра, т.е. йорданова алгебра ограниченных самосопряженных операторов в комплексном гильбертовом пространстве с умножением $T \circ S = 1/2 (T \cdot S + ST)$, замкнутая в слабой операторной топологии ([6I]), является примером специальной JBW - алгебры. JBW - Алгеброй является в частности, эрмитова часть алгебры Фон Неймана ([55]).

3. Следы на OJB - алгебрах.

В теории йордановых алгебр важную роль играют операторы U_a :

$U_a = 2R^2_a - R_a$, где R_a как отмечалось выше -

оператор умножения на элемент a из OJB -алгебры A .

О п р е д е л е н и е 0.11 (ср. [12]) Конечным следом на OJB -алгебре A называется положительный линейный функционал τ такой, что $\tau(U_s a)=\tau(a)$ для любых $a\in A$ и симметрий $s\in A$.

Можно показать, что положительный линейный функционал τ на OJB -алгебре A (в частности, на JBW -алгебре) будет следом тогда и только тогда, когда $\tau(a(bc))=\tau((ab)c)$ для всех $a,b,c\in A$.

След τ называется нормальным, если для любой монотонно возрастающей и ограниченной сверху сети $\{x_\alpha\}_\alpha$ в A имеет место равенство $\tau(\sup_\alpha x_\alpha)=\sup\tau(x_\alpha)$. След называется точным, если $\tau(a)>0$ для всех ненулевых $a\in A_+$.

4. Топология сходимости по мере и пространство $L_p(A)$.

Пусть $\mathcal{A}$ OJ - алгебра, A - OJB - алгебра ограниченных элементов $\mathcal{A}$, ∇ - логика идемпотентов $\mathcal{A}$. И пусть τ - точный, нормальный, конечный след на A . Тогда из [31] следует, что A является JBW - алгеброй.

О п р е д е л е н и е 0.12 ([12]) Топологией сходимости по мере на OJ - алгебре $\mathcal{A}$ назовем топологию, в которой базис окрестностей нуля образуют множества вида $N(\varepsilon,\delta)$, $\varepsilon>0,\delta>0$, где .

$$N(\varepsilon,\delta)=\{a\in\mathcal{A}\mid \exists p\in\nabla:\tau(p^\perp)\le\delta,\ U_p a\in A,\ \|U_p a\|_\infty\le\infty\}.$$

Топологию сходимости по мере обозначим через t .

П р е д л о ж е н и е 0.13 ([12]) Алгебра $\mathcal{A}$ относительно топологии t является отделимой топологической йордановой алгеброй, т.е. все алгебраические операции непрерывны по совокупности переменных.

Пусть $\hat{A}$ пополнение A в топологии t.

Теорема 0.I4 ([3I]) Алгебра $\hat{A}$ является OJ - алгеброй, совокупность ограниченных элементов которой совпадает с A.

OJ - алгебру $\hat{A}$ в теореме 0.I4 назовем алгеброй измеримых элементов для JBW - алгебры A.

Топологию сходимости по мере можно обобщить, рассмотрев топологию сходимости по функции размерности.

Определение 0.I5 ([37]) Идемпотенты $p, q \in \nabla$ называются эквивалентными ($p \sim q$), если существует конечный набор симметрий $S_1, S_2, \ldots, S_n$ таких, что $U_{S_n} \cdot \ldots \cdot U_{S_1} p = q$.

Определение 0.I6 ([I0]) Функция $d : \nabla \longrightarrow E$ со значениями в некотором полуполе E называется функцией размерности, если

1) $d(e) \geqslant \tilde{\theta}$ при всех $e \in \nabla$ и $d(e) = \tilde{\theta}$ тогда и только тогда, когда $e = \theta$;

2) $d(e) = d(f)$, если $e \sim f$;

3) d вполне аддитивна.

(Здесь θ ноль в ∇, а $\tilde{\theta}$ - ноль в полуполе E).

Пусть на ∇ существует функция размерности d со значениями в топологическом полуполе E (см. [3I]). Окрестностями точки x в топологии сходимости по функции размерности будут множества $\{x + \mathcal{U}(\varepsilon, V)\}$, где $\varepsilon > 0$, V - окрестность нуля в E, а множество $\mathcal{U}(\varepsilon, V)$ определяетс я как

$$\mathcal{U}(\varepsilon, V)=\{x\in\hat{A} \mid \exists p\in\nabla, d(p^{\perp})\in V, U_p(x)\in A, \|U_p x\|_\infty\leq\varepsilon\}.$$

Топологию сходимости по функции размерности d будем называть d - топологией.

П р е д л о ж е н и е 0.17 ([10]) OJ - алгебра $\hat{A}$ с d- топологией является топологическим кольцом.

Пусть теперь p - некоторое число из $[1, +\infty)$.

Элемент $x=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\, d(e_\lambda)\in\hat{A}$ называется интегрируемым с p -ой степенью модуля, если $\int_{-\infty}^{+\infty}|\lambda|^p d\tau(e_\lambda)<\infty$.

Совокупность всех интегрируемых с p -ой степенью модуля элементов из OJ - алгебры $\hat{A}$ будем обозначать $L_p(A)$. След τ продолжается до положительного линейного функционала τ' на $L_p(A)$, при этом $\tau'(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\, d\tau(e_\lambda)$ называется интегралом элемента x.

Если $x\in L_p(A)$, то число $\|x\|_p=(\tau(|x|^p))^{1/p}$ является нормой x (см. [4]). Норму $\|x\|_p$ будем называть L_p- нормой элемента x. Для $x\in L_1(A)$ имеет место и другое, эквивалентное данному определение $\|x\|_1$, а именно: $\|x\|_1=\sup\{|\tau(xb)|, b\in A, \|b\|_\infty\leq 1\}$.

Т е о р е м а 0.18 ([2,4]) $(L_p(A), \|\cdot\|_p)$ - банахово пространство.

Сформулируем теперь аналог леммы Фату в теории неассоциативного интегрирования.

Лемма 0.19 ([II] лемма Фату). Если $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_1(A)$ сходится по мере к $a \in \hat{A}$ и $\sup_n \|a_n\|_1 < \infty$, то $a \in L_1(A)$ и $\|a\|_1 \le \underline{\lim}_n \|a_n\|_1$.

Для каждого элемента $a \in \hat{A}$ определим функцию

$$\tilde{a} : (0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty),$$

$$\tilde{a}(\alpha) = \inf\{\lambda \in [0, +\infty) : \tau(\mathbb{1} - e_\lambda) \le \alpha\},$$

где $\{e_\lambda\}$ - спектральное семейство элемента $|a|$.

Предложение 0.20. Функция $\tilde{a}(\alpha)$ обладает следующими свойствами:

(i) $\tilde{a} = |a|^{\sim}$, $a \in \hat{A}$;

(ii) если $a, b \in \hat{A}$, то $(a+b)^{\sim}(\alpha+\beta) \le \tilde{a}(\alpha) + \tilde{b}(\beta)$;

(iii) если $a, b \in \hat{A}$ и $\theta \le b \le a$, то $\tilde{b} \le \tilde{a}$;

(iv) если $a \in \hat{A}$, $\theta \le a$, $1 \le p < \infty$, то

$$(a^p)^{\sim} = (\tilde{a})^p;$$

(v) если $a, b \in \hat{A}$ и $\int_0^\infty \tilde{a}(\alpha)\tilde{b}(\alpha)\,d\alpha < \infty$, то

$$ab \in L_1(A) \text{ и } \|ab\|_1 \le \int_0^\infty \tilde{a}(\alpha)\tilde{b}(\alpha)\,d\alpha;$$

(vi) $a \in L_p(A)$ $(1 \leq p < \infty)$ тогда и только тогда, когда $a \in \hat{A}$ и $\int_0^\infty \tilde{a}(\alpha)\, d\alpha < \infty$. При этом $\|a\|_p = \left(\int_0^\infty (\tilde{a})^p(\alpha)\, d\alpha \right)^{1/p}$.

Доказательство этого предложения мы дадим ниже.
Функция $\tilde{a}(\alpha)$ называется перестановкой элемента a.

Пусть A_1 – произвольная JBW – подалгебра алгебры A и τ_1 – есть сужение точного нормального конечного следа τ на A_1, тогда справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 0.2I ([II]) Существует линейное положительное отображение $M : L_1(A) \longrightarrow L_1(A_1)$ с единичной L_1 – нормой, определенное равенством $\tau(M(a)b) = \tau(a \cdot b)$ для всех $a \in L_1(A)$ и $b \in L_1(A_1)$. При этом $M(A) \subset A_1$ и сужение M на A_1 имеет единичную $\|\cdot\|_\infty$ – норму на A. Далее M отображает $L_2(A)$ в $L_2(A_1)$ и выполняются следующие условия:

I) $M(a) = a$ для любого $a \in L_1(A_1)$ в частности, $M(M(a)) = M(a)$;

2) Если $x \in L_2(A)$, $y \in L_2(A_1)$, то $M(xy) = yM(x)$.

Отображение $M(\cdot)$ построенное в теореме 0.2I называется условным математическим ожиданием на подалгебру A_1.

5. JW – алгебры и алгебры Фон Неймана.

В этом пункте мы продолжим рассмотрение JW – алгебр, определение которым было дано в разделе 2 данного параграфа.

Определение 0.22 ([38]) JW - алгебра A называется обратимой, если $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} a_n + a_n \cdot a_{n-1} \cdots$ $\cdots a_2 \cdot a_1 \in A$ для всех $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \in A$, где „$\cdot$" ассоциативное умножение на $\mathcal{B}(H)$ - алгебре всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H, на котором действует A.

Пусть A - произвольная JW - алгебра с точным нормальным конечным следом в гильбертовом пространстве H. Самосопряженный оператор x в H (вообще говоря неограниченный) назовем присоединенным к A, если все его спектральные проекторы лежат в A (см. [I2]). Через $E(A)$ обозначим совокупность всех самосопряженных операторов, присоединенных к A. В [I2] доказано, что $E(A)$ является OJ -алгеброй, множество ограниченных элементов которой совпадает с A.

Через $\mathcal{R}(A)$ будем обозначать вещественную W^* - алгебру, порожденную A, т.е. наименьшую слабо замкнутую вещественную $*$ - подалгебру в $\mathcal{B}(H)$, содержащую A. И пусть $\mathfrak{A}(A)$ слабо замкнутая комплексная $*$ - алгебра (т.е. алгебра фон Неймана) в $\mathcal{B}(H)$, порожденная A. Очевидно, $\mathfrak{A}(A)$ можно отождествить с бикоммутантом A'' JW алгебры A в $\mathcal{B}(H)$. Алгебра $\mathfrak{A}(A)$ называется обертывающей алгеброй Неймана для A. Существуют тесные связи между обратимыми JW - алгебрами и их обертывающими W^* - алгебрами. Эти связи наглядно иллюстрирует следующая теорема (см. [38])

Теорема 0.23. Если A - обратимая JW - алгебра, то $\mathcal{R}(A)_h = A$, $\mathfrak{A}(A) = \mathcal{R}(A) + i\,\mathcal{R}(A)$, где

$\mathcal{R}(A)_h$ - означает множество всех самосопряженных элементов $*$ - алгебры $\mathcal{R}(A)$. Кроме того, всякий точный нормальный конечный след τ на A продолжается до точного нормального конечного следа τ' на $\mathfrak{A}(A)$.

В условиях теоремы 0.23 топология t сходимости по мере на A есть сужение топологии t' сходимости по мере на $\mathfrak{A}(A)$ определяемой окрестностями вида:

$$\Omega(\varepsilon,\delta)=\{T\in\mathfrak{A}(A)\,|\,\exists p\in\mathfrak{A}(A),\ p^2=p=p^*:\|Tp\|_\infty\leq\varepsilon,\tau'(p^\perp)\leq\delta\}.$$

Пополнение $\mathfrak{A}(A)$ в топологии t' совпадает с алгеброй $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$ всех измеримых операторов, присоединенных к $\mathfrak{A}(A)$ (см.[57]). Отсюда следует вложение $E(A)\subset\mathcal{L}(\mathfrak{A}(A))$, где $E(A)$ OJ - алгебра операторов, присоединенных к JW -алгебре A .

Приведем теперь доказательство предложения 0.20, которое мы сформулировали в пункте 4 этого параграфа.

Доказательство пунктов (i), (iv) и (vi) проводится аналогично доказательству соответствующих утверждений, сформулированных в [62] (см. предложение 2.4 (i),(vi) и ($viii$) для алгебр фон Неймана. Так как в остальных неравенствах участвуют только два элемента, то в силу леммы 2.3 из [44] можно считать, что A - JW - алгебра. Более того, можно показать, что JW - алгебра, порожденная двумя элементами и $\mathbb{1}$, обратима (см. [4]). И поэтому не ограничивая общности будем считать, что A - обратимая JW - алгебра. Тогда в силу теоремы 0.23 неравенства в (ii),(iii) будут следствием соответствующих неравенств, доказанных для алгебр фон Неймана (см. [62] предложение 2.4 (iii) и (v)). Пусть a и b из $\hat{A}$ удовлетворяют условию пункта (v). Рассуждая так же, как при доказательстве пунктов (ii) и (iii), можно считать, что A - обратимая JW -алгебра. Поэтому $\hat{A}$ совпадает с OJ -алгеброй $E(A)$ всех самосопряженных операторов, присоединенных к A (см. [12]). Через $\mathfrak{A}(A)$ обозначим обертывающую алгебру фон Неймана для A . Из теоремы 0.23 следует, что $E(A)$ содержится в алгебре всех измеримых операторов $\mathcal{L}(\mathfrak{A}(A))$, присоединенных к $\mathfrak{A}(A)$. Теперь мы находимся в условиях теоремы 3.3 работы [62] , из которой следует, что $a \circ b = 1/2(ab+ba) \in L_1(\mathfrak{A}(A))$ и поэтому $a \circ b \in L_1(\mathfrak{A}(A)) \cap$ $\cap\, E(A) \subset L_1(A)$, кроме того, $\|a \circ b\|_1 = \|1/2(ab+ba)\|_1 \leq$ $\leq \frac{1}{2}(\|ab\|_1 + \|ba\|_1) \leq \int_0^\infty \tilde{a}(\alpha)\tilde{b}(\alpha)d\alpha$,

что и завершает доказательство пункта (V). Предложение доказано.

В заключение этого пункта мы приведем несколько определений из теории некоммутативных пространств Орлича, введенных М.А.Муратовым в [25] .

Пусть $\mathfrak{A}$ - некоторая алгебра фон Неймана с точным нормальным конечным следом τ . Через $M(u)$ и $N(v)$ будем обозначать дополнительные друг к другу $\mathcal{N}$ - функции (определение $\mathcal{N}$ - функции смотрите в § 1.2).

О п р е д е л е н и е 0.24. Классом Орлича, порожденным $\mathcal{N}$ - функцией $M(u)$, назовем множество

$$L_M(\mathfrak{A}) = \{T \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}) : M(|T|) \in L_1(\mathfrak{A}, \tau)\},$$

где $L_1(\mathfrak{A},\tau)$ -пространство всех интегрируемых измеримых операторов для $\mathfrak{A}$.

Аналогично определяется класс Орлича порожденный $\mathcal{N}$ - функцией $N(v)$

$$L_N(\mathfrak{A}) = \{S \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}) : N(|S|) \in L_1(\mathfrak{A}, \tau)\}.$$

Для $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{A})$ обозначим

$$T L_N(\mathfrak{A}) = \{T \cdot S : S \in L_N(\mathfrak{A})\}.$$

Определение 0.25. Пространством Орлича, порожденным N - функцией $M(u)$ называется линейное пространство

$$L_M^*(\mathcal{O}\mathcal{L}) = \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{O}\mathcal{L}) : T L_N(\mathcal{O}\mathcal{L}) \subset L_1(\mathcal{O}\mathcal{L}, \tau)\}.$$

Если алгебра фон Неймана $\mathcal{O}\mathcal{L}$ коммутативна, т.е. если кольцо $\mathcal{L}(\mathcal{O}\mathcal{L})$ изоморфно кольцу всех измеримых функций на пространстве с мерой, то приведенные выше определения совпадают с известными определениями класса и пространства Орлича измеримых функций (см., например, [23] стр. 76 и 83).

На пространстве Орлича $L_M^*(\mathcal{O}\mathcal{L})$ измеримых операторов, так же, как и на функциональном пространстве Орлича, можно задать норму Орлича.

Определение 0.26. Для каждого оператора $T \in L_M^*(\mathcal{O}\mathcal{L})$ число

$$\|T\|_M = \sup\{|\tau(T \cdot S)|, \tau(N(|S|)) \leq 1, S \in L_N(\mathcal{O}\mathcal{L})\} -$$

- называется нормой Орлича оператора T.

6. Тензорные произведения неограниченных операторов.

Результаты, приводимые в настоящем пункте, были получены Стайнспрингом в [58].

Определение 0.27. Пусть S и T - операторы из гильбертовых пространств H_1 и H_2 соответственно. Мы определяем их алгебраическое тензорное произведение $S \otimes_{alg} T$ как минимальное линейное расширение отображения $S \otimes y \longrightarrow Sx \otimes Ty$, где x принадлежит области определения оператора S, а y - области определения оператора T. Если операторы S и T замкнуты, мы определяем $S \otimes T$ как замыкание оператора $S \otimes_{alg} T$.

Это замыкание существует согласно следующей теореме.

Теорема 0.28. Пусть S и T - замкнутые операторы в H_1 и H_2 с плотными областями определения. Тогда существует оператор $S \otimes T$ и $(S \otimes T)^* = S^* \otimes T^*$.

Следующая теорема и ее следствие являются одним из важных результатов работы [58] и будут использованы нами в § I.4 при рассмотрении свойств линейных операторов.

Т е о р е м а 0.29 Пусть S и T самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах H_1 и H_2 соответственно, $S=\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d e(\lambda)$, $T=\int_{-\infty}^{+\infty} \mu \, d f(\mu)$ - их спектральные разложения, тогда:

$$S \otimes T = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\mu \, d(e(\lambda)\otimes f(\mu)) .$$

Пусть $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ - алгебры фон Неймана в гильбертовых пространствах H_1 и H_2 соответственно. Тогда символом $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ мы будем обозначать тензорное произведение алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, действующее в гильбертовом пространстве $H_1 \otimes H_2$ (см. [58]), и которое является наименьшей W^* - алгеброй содержащей все операторы вида $S \otimes T$, где S из $\mathfrak{A}_1$, а T из $\mathfrak{A}_2$.

С л е д с т в и е 0.30 Пусть τ_1 и τ_2 точные нормальные конечные следы на алгебрах фон Неймана $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ соответственно. Если $S \in L_1(\mathfrak{A}_1, \tau_1)$ и $T \in L_1(\mathfrak{A}_2, \tau_2)$, то $S \otimes T \in L_1(\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2, \tau)$, $\tau = \tau_1 \times \tau_2$ и

$$\|S \otimes T\|_1 = \|S\|_1 \cdot \|T\|_1 .$$

ГЛАВА I

РАЗЛИЧНЫЕ КЛАССЫ НЕАССОЦИАТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА В УПОРЯДОЧЕННЫХ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБРАХ.

§ I.I Нормированные идеальные пространства в OJ - алгебре измеримых элементов.

Пусть A - модулярная JBW - алгебра и τ - точный нормальный конечный след на A . Обозначим через $\hat{A}$ OJ - алгебру всех измеримых элементов для A .

Определение I.I.I Линейное подпространство E в $\hat{A}$ называется идеальным, если выполнены следующие условия:

I) если $a \in E$, $b \in \hat{A}$, $|b| \le |a|$ следует $b \in E$;

II) если $a \in E$, $b \in \hat{A}$ следует $ab \in E$, где

$|a| = \sqrt{a^2}$ - модуль элемента a .

Если кроме того, на E задана норма $\|\cdot\|_E$ со свойствами:

i) $\|b\|_E \le \|a\|_E$ при $|b| \le |a|$, $b, a \in E$;

ii) $\|ba\|_E \le \|b\|_\infty \|a\|_E$, где $b \in A$ и $a \in E$,

то E называется нормированным идеальным пространством на A (сокращенно НИП). Полное по норме НИП E называется банаховым идеальным пространством на A (сокращенно БИП).

Примерами банаховых идеальных пространств на A являются

L_p - пространства и пространства Орлича § I.2

В OJ - алгебре $\hat{A}$ естественным образом определяется топология сходимости по мере, относительно которой $\hat{A}$ - полная топологическая алгебра (см.§ 0). Базис окрестностей нуля в этой топологии образуют множества вида $N(\varepsilon, \delta)$, $\varepsilon, \delta > 0$,

$N(\varepsilon,\delta)=\{a\in\hat{A} \mid \exists p\in\nabla: \tau(\mathbb{1}-p)\le\delta,\ U_p a\in A,\ \|U_p a\|_\infty<\varepsilon\}$,

где $\|U_p a\|_\infty$ JB -норма элемента $U_p a$ в A, $\mathbb{1}$ единица в A, а через ∇ обозначена логика идемпотентов A. Если $\{a_n\}\subset A, a\in A$ и a_n сходится к a относительно топологии сходимости по мере, то говорят, что a_n сходится к a по мере и пишут $a_n \xrightarrow{t} a$.

Доказательство многих результатов из параграфов I.I, I.2, I.3 и I.5 аналогично случаю некомутативных идеальных пространств измеримых операторов (см. [24], [25], [34], [35]). Тем не менее мы приводим подробное доказательство для полноты изложения и удобства чтения.

П р е д л о ж е н и е I.I.2 Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ нормированное идеальное пространство на A. Тогда:

I) если $a_n, a\in E$ и $\|a_n - a\|_E \longrightarrow 0$, то $a_n \xrightarrow{t} a$;

П) если $\{a_n\}\subset E$ фундаментальная последовательность, то существует $a\in\hat{A}$, для которого $a_n \xrightarrow{t} a$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) Предположим, что $\{a_n\}$ не сходится к a по мере. Тогда, переходя к подпоследовательности, можно считать, что найдутся такие числа $\varepsilon, \delta > 0$, что

$|a_n - a| \notin N(\varepsilon, \delta)$ и $\|a_n - a\|_E < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Обозначим через $\{p(\lambda, n)\}$ спектральное семейство идемпотентов для $|a_n - a|$ и положим $p_n = 1 - p(\varepsilon, n)$,

$$f_n = \sup_{m \geq n} p_m, \quad p = \inf_{n \geq 1} f_n.$$

Так как $\tau(p_n) > \delta$, то $\tau(p) \geq \delta$. Из неравенства $\varepsilon p_n \leq |a_n - a|$ вытекает $\|p_n\|_E < \frac{1}{2^n}$. Если

$$q_{n,s} = p \wedge \left(\bigvee_{m=n}^{n+s} p_m\right), \text{ то } q_{n,s} \uparrow (f_n \wedge p) \text{ при}$$

$s \to \infty$ (здесь используется тот факт, что логика идемпотентов модулярной JBW - алгебры является непрерывной геометрией [3I], стр. 76). Следовательно, для любого n существует такой номер s_n, что $\tau(p - q_{n,s_n}) < \frac{1}{2^n}$. Положим $\ell_n = \inf_{m \geq n} q_{m,s_m}$, тогда $\{\ell_n\}$ возрастает,

$$\ell_n \leq p \quad \text{и} \quad \tau(p - \ell_n) = \tau\left(\bigvee_{m \geq n} (p - q_{m,s_m})\right) \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Это означает, что $\ell_n \uparrow p$. Покажем теперь, что

$\left\|\bigvee_{m=1}^{n} p_m\right\|_E \leq \sum_{m=1}^{n} \|p_m\|_E$. Достаточно показать, что

$\|p_1 \vee p_2\|_E \leq \|p_1\|_E + \|p_2\|_E$, а затем применить математическую индукцию по n. По [3I] стр. I59 имеем $p_1 \vee p_2 - p_1 \sim$ $\sim p_2 - p_1 \wedge p_2$, $\|p_1 \vee p_2 - p_1\|_E = \|p_2 - p_1 \wedge p_2\|_E \leq \|p_2\|_E$,

следовательно, $\|p_1 \vee p_2\|_E \leq \|p_1 \vee p_2 - p_1\|_E + \|p_1\|_E \leq \|p_1\|_E + \|p_2\|_E$.

Таким образом при $m \geqslant n$.

$$\| l_n \|_E \leqslant \| q_{m,s_m} \|_E \leqslant \| \bigvee_{k=m}^{m+s_m} p_k \|_E \leqslant \sum_{k=m}^{m+s_m} \| p_k \|_E < \frac{1}{2^{m-1}}$$

Откуда $l_n = \theta$, и поэтому $p = \theta$, что противоречит неравенству $\tau(p) \geqslant \delta$.

П) Так как $\hat{\hat{A}}$ полное метрическое пространство относительно сходимости по мере, то достаточно показать, что последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна по мере. Если это не так, то найдутся такие $N(\varepsilon,\delta)$, $m_n \geqslant k_n \geqslant n$, что $|a_{m_n} - a_{k_n}| \notin N(\varepsilon,\delta)$, $n = 1,2,\dots$ Но $\| a_{m_n} - a_{k_n} \|_E \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$. В силу пункта I) $|a_{m_n} - a_{k_n}| \xrightarrow{t} \theta$, что противоречит выбору a_{m_n} и a_{k_n} .

Предложение I.I.3 В НИП E совокупность положительных элементов E_+ , замкнута по норме, где $E_+ = E \cap \hat{A}_+$.

Доказательство. Пусть $a \in \bar{E}_+$, тогда существует последовательность $\{a_n\}_n \subset E_+$, которая сходится к a по норме $\| \cdot \|_E$. Надо показать, что $a \geqslant 0$. Пусть a_- - отрицательная часть элемента a , $p = S(a_-)$ - носитель a_- . В силу положительности оператора U_p [IO] имеем $U_p a_n \geqslant 0$. Отсюда по свойствчу (i) нормы в НИП

$$\| a_- \| \leqslant \| U_p a_n + a_- \|_E = \| U_p (a_n - a) \|_E =$$

$$\| 2(p(p(a_n - a)) - p(a_n - a) \|_E \leqslant 2 \| p \|_\infty \| a_n -$$

$$- a \|_E + \| p \|_\infty \| a_n - a \|_E \leqslant 3 \| a_n - a \|_E \longrightarrow 0$$ при

$n \to \infty$, т.е. $\|a_-\|_E = 0$ или $a_- = \theta$.

Таким образом $a \in E_+$, т.е. $E_+ = \overline{E}_+$.

Т е о р е м а I.I.4 Для всякого нормированного идеального пространства E в OJ - алгебре $\hat{A}$, следующие четыре утверждения равносильны:

(i) E - полно по норме;

(ii) пусть $\{a_n\}_n$ - последовательность положительных элементов из E , причем $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|_E < \infty$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по норме в E .

(iii) пусть $\{a_n\}_n$ - монотонно возрастающая последовательность Коши в E_+, тогда в E найдется такой элемент a , что $a_n \uparrow a$.

(iv) пусть $\{a_n\}_n$ - монотонно возрастающая последовательность Коши в E_+ , тогда в E найдется такой элемент a , что a_n - сходится к a по норме.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (ii) $\Longrightarrow$ (i) Пусть a_n^+ , a_n^- - соответственно положительная и отрицательная части элемента a_n , $n = 1, 2, \ldots$. В силу свойства (ii) нормы в НИП имеем $\|a_n^+\|_E \le \||a_n|\|_E$, $\|a_n^-\|_E \le \||a_n|\|_E$, следовательно для последовательностей $\{a_n^+\}$ и $\{a_n^-\}$ выполнены условия пункта (ii) . Поэтому, в E существуют элементы b^+ и b^- , что $b^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $b^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

Через S_k обозначим k-ую частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, т.е. $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$. Оценим норму разности S_k и $(b^+ - b^-)$.

Тогда

$$\| S_k - (b^+ - b^-) \|_E = \| \sum_{n=1}^{k} a_n - (b^+ - b^-) \|_E \le$$

$$\| \sum_{n=1}^{k} a_n^+ - b^+ \|_E + \| \sum_{n=1}^{k} a_n^- - b^- \|_E \quad .$$

При $k \longrightarrow \infty$ слагаемые в правой части стремятся к 0, а это означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к $b^+ - b^-$.

Следовательно E полно.

$(i) \Longrightarrow (iv)$ В силу пункта (i) и замкнутости E_+, всякая монотонно возрастающая последовательность Коши $\{a_n\}$ в E_+ сходится по норме к некоторому a из E_+.

Пусть k - произвольно взятое натуральное число.

Тогда последовательность $\{a_n - a_k\}_n$ сходится по норме к $(a - a_k) \in E_+$. Т.к. $E \subset \hat{A}$, то в силу монотонной полноты $\hat{A}$ существует элемент $a' \in \hat{A}$, что $a' = \sup_n a_n$ при этом $a' \le a$. В силу свойства (I) нормы в НИП $a' \in E$.

Для доказательства импликации $(iv) \Longrightarrow (iii)$ рассмотрим монотонно возрастающую последовательность Коши $\{a_n\}_n$ в E_+. Тогда последовательность $\{b_m\}$ элементов вида $a_1 + \sum_{k=1}^{m} k(a_{k+1} - a_k)$ лежит в E_+ и монотонно возрастает. Не теряя общности, положим $\| a_{k+1} - a_k \|_E \le k^{-3}$, $k = 1, 2, \ldots$ и поэтому при

$t > m$ справедливо неравенство: $\| b_t - b_m \|_E \leq \sum_{k=m+1}^{t} \frac{1}{k^2}$,

правая часть которого сходится к 0 при $m \longrightarrow \infty$.

Следовательно $\{b_m\}_m$ - последовательность Коши в E.

Далее, обе последовательности $\{a_n\}_n$ и $\{b_m\}_m$ в силу пункта (iv) имеют $\sup$ в E. Пусть $a = \sup_n a_n$ и $b = \sup_m b_m$. В силу неравенства:

$$n(a - a_n) = \sup_{m > n} \sum^{m} n(a_{k+1} - a_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} k(a_{k+1} - a_k) \leq b,$$

получаем $\| a - a_n \|_E \leq \| n^{-1} b \|_E \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$, откуда следует (iii).

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Рассмотрим последовательность $\{b_k\}_k$ - частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $\{a_n\}_n \subset E_+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \| a_n \|_E < \infty$. Тогда $b_k \leq b_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Если $m > k$, то из неравенства $\| b_m - b_k \|_E \leq \sum_{n=k+1}^{m} \| a_n \|_E$ и сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \| a_n \|_E$ получаем, что $\{b_k\}_k$ - последовательность Коши в E. И поэтому из (iii) следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ в E по норме. Теорема доказана.

Говорят, что в НИП E выполнено условие (B), если из $\theta \leq a_n \uparrow$, $a_n \in E$ $(n \in N)$, $\sup_{n \geq 1} \| a_n \|_E < \infty$ следует, что существует такое $a \in E$, что $a_n \uparrow a$.

Предложение I.I.5 Если в нормированном идеальном пространстве E из $\hat{A}$ выполнено условие (B), то E - - БИП в $\hat{A}$.

Доказательство. Пусть $\{a_n\}_n$ монотонно возрастающая последовательность Коши в E_+. Очевидно $\sup_n \|a_n\|_E < \infty$. Т.к. в E выполнено условие (B), то $\{a_n\}_n$ возрастает к некоторому a из E, а поэтому из теоремы I.I.4 (iv) вытекает, что E - БИП в $\hat{A}$.

Предложение доказано.

Предложение I.I.6 В пространстве $L_1(A)$ выполнено условие (B).

Доказательство. Рассмотрим монотонно возрастающую последовательность $\{a_n\}_n$ из $L_1(A)_+$ такую, что $\sup_n \|a_n\|_1 < \infty$. Так как $\|a_m\|_1 = \tau(a_m)$ для $a_m \in \{a_n\}_n$, то

$$\|a_1\|_1 \leq \|a_2\|_1 \leq \ldots\ldots\ldots \leq \|a_n\|_1 \leq \ldots\ldots$$

и поэтому числовая последовательность $\{\|a_n\|_1\}_n$ - сходится. В силу равенства $\|a_n - a_k\|_1 = \|a_n\|_1 - \|a_k\|_1$ при $n > k$ получаем, что $\{a_n\}_n$ - последовательность Коши в $L_1(A)$.

Из полноты пространства $L_1(A)$ [12] и теоремы I.I.4(iv) следует, что $\{a_n\}_n$ возрастает к некоторому $a \in L_1(A)$, т.е. в $L_1(A)$ выполнено условие (B). Предложение доказано.

§ I.2 Пространства Орлича, построенные по $\mathcal{N}$ - функциям.

Пусть A, JBW - алгебра с точным нормальным конечным следом τ, $\hat{A}$ OJ - алгебра измеримых элементов для A.

Прежде всего, для дальнейшего изложения напомним определение $\mathcal{N}$ - функции (см. [23] стр. I9).

Определение I.2.I. Вещественная функция $M(u)$ вещественного переменного u называется $\mathcal{N}$ - функцией, если выполнены следующие условия:

(i) $M(u)$ непрерывная, четная, выпуклая функция;

(ii) $M(u)=0$ лишь при $u=0$;

(iii) $\lim\limits_{u\to 0}\frac{M(u)}{u}=0$ и $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{M(u)}{u}=\infty$.

Функция $N(v)=\max\limits_{u\geq 0}\{uv-M(u)\}$ также является $\mathcal{N}$ - функцией и называется дополнительной к $\mathcal{N}$ - функции $M(u)$. Легко видеть, что дополнительные друг к другу функции $M(u)$ и $N(v)$ связаны неравеством

$uv \leq M(u)+N(v)$ для любых u и v, которое называется неравенством Юнга ([23] , стр. 24).

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $M(u)$ и $N(v)$ дополнительные друг к другу $\mathcal{N}$ - функции.

Определение I.2.2 Классом Орлича, порожденным $\mathcal{N}$ - функцией $M(u)$, назовем множество

$$L_M(A)=\{a\in\hat{A} : M(|a|)\in L_1(A)\}.$$

Аналогично определяется класс Орлича порожденный $\mathcal{N}$ - - функцией $N(v)$:

$$L_N(A)=\{b\in\hat{A} : N(|b|)\in L_1(A)\}.$$

Для $a\in\hat{A}$ обозначим

$$aL_N(A)=\{ab : b\in L_N(A)\}.$$

Определение I.2.3 Пространством Орлича, порожденным $\mathcal{N}$ - функцией $M(u)$, называется линейное пространство:

$$L^*_M(A)=\{a\in\hat{A} : aL_N(A)\subset L_1(A)\}.$$

Если JBW - алгебра A ассоциативна, т.е. если OJ - - алгебра $\hat{A}$ изоморфна кольцу всех измеримых функций на пространстве с мерой (см. § 0, теорема 0.8). то приведенные выше определения совпадают с известными определениями класса и пространства Орлича измеримых функций (см., например, [23] , стр. 76 и 83).

В этом случае класс Орлича $L_M(A)$ и пространство Орлича $L^*_M(A)$ мы будем называть функциональными.

На пространстве Орлича $L^*_{M}(A)$ также, как и на функциональном пространстве Орлича, можно задать две нормы: норму Орлича и норму Люксембурга.

Определение I.2.4 Для каждого элемента

$a \in L^*_{M}(A)$ число

$$\|a\|_M = \sup\{|\tau(ab)|,\ \tau(N(|b|)) \le 1,\ b \in L_N(A)\}$$

- называется нормой Орлича элемента a.

Теорема I.2.5 $(L^*_M(A), \|\cdot\|_M)$ - является банаховым пространством в $\hat{A}$.

Прежде чем доказывать теорему, докажем несколько предложений.

Как уже отмечалось (§ 0), для каждого элемента $a \in \hat{A}$ определена функция:

$$\tilde{a}(\alpha) = \inf\{\lambda \in [0,+\infty) : \tau(1 - E(\lambda)) \le \alpha\},$$ где

$\{E(\lambda)\}$ - спектральное семейство элемента a.

Предложение I.2.6 Пусть $M(u)$ N - функция. Для каждого положительного элемента a из OJ - алгебры $\hat{A}$ имеет место равенство: $[M(a)]^{\sim} = M(\tilde{a})$.

Доказательство. Пусть a из $\hat{A}$ и $\int\limits_0^\infty \lambda\, dE(\lambda)$ - его спектральное разложение.

В § 0 было отмечено, что спектральное разложение позволяет определить элемент $M(a)$ для непрерывной функции $M(u)$ по формуле $M(a)=\int_0^\infty M(\lambda)\,dE(\lambda)$.

Так как в формулировке предложения участвует только один элемент a и его спектральное семейство, то доказательство дословно следует некоммутативному случаю (см. [25]).

Предложение I.2.7 Пусть A JBW-алгебра с точным нормальным конечным следом τ . Тогда справедливы следующие три включения: $A\subset L_M(A)\subset L^*_M(A)\subset L_1(A)$.

Доказательство. Функция $M(u)$ непрерывна, выпукла и $M(0)=0$. Следовательно, при $u\geq 0$ $M(u)$ строго возрастает и поэтому $\theta\leq M(|a|)\leq M(\|a\|_\infty)\mathbb{1}\in A$ для всех a из A . Тогда, в силу конечности τ

$$M(A_+)\subset L_1(A)\text{, т.е. } A\subset L_M(A) .$$

Пусть a и b произвольные элементы из $L_M(A)$ и $L_N(A)$ соответственно. Если мы покажем, что $ab\in L_1(A)$, то этим будет доказана справедливость вложения $L_M(A)\subset L^*_M(A)$

Через $\tilde{a}(\alpha)$ и $\tilde{b}(\alpha)$ обозначим перестановки элементов и , тогда в силу неравенства Юнга справедливо следующее:

$$\int_0^\infty \tilde{a}(\alpha)\tilde{b}(\alpha)\,d\alpha\leq\int_0^\infty M(\tilde{a}(\alpha))\,d\alpha+\int_0^\infty N(\tilde{b}(\alpha))\,d\alpha$$

Так как $M(\tilde{a}) = [M(|a|)]^{\sim}$, $N(\tilde{b}) = [N(|b|)]^{\sim}$

и $M(|a|) \in L_1(A)$, $N(|b|) \in L_1(A)$, то

по предложению 0,20 (v) имеем $\|a\, b\|_1 < \infty$,

следовательно $a \in L_M^*(A)$.

Вложение $L_M^*(A) \subset L_1(A)$ очевидно.

Предложение доказано.

Существуют тесные связи теории некоммутативных идеальных пространств с их аналогами в теории интегрирования на йордановых банаховых алгебрах.

В случае, когда A обратимая JW - алгебра, то для изучения свойства $L_M(A)$, $L_M^*(A)$ и $\|a\|_M$ важно установить связь с их аналогами в обертывающей алгебре фон Неймана $\mathcal{O}\!\mathcal{L} = \mathcal{O}\!\mathcal{L}(A)$ для A.

Такую связь нам дает следующая теорема:

Т е о р е м а I.2.8 Пусть A - обратимая JW - алгебра с точным нормальным конечным следом τ. Через $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ - обозначим обертывающую алгебру фон Неймана для A, а точный нормальный конечный след τ' есть продолжение τ на $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$. Тогда

(i) $L_M(A) = L_M(\mathcal{O}\!\mathcal{L}) \cap E(A)$;

(ii) $L^*_M(A) = L^*_M(\mathfrak{A}) \cap E(A)$;

(iii) $\|a\|^A_M \leq \|a\|^{\mathfrak{A}}_M$ для всякого $a \in L^*_M(A)$,

где $\|a\|^A_M$, $\|a\|^{\mathfrak{A}}_M$ нормы Орлича элемента a в $L^*_M(A)$ и $L^*_M(\mathfrak{A})$ соответственно.

Доказательство (i). Включения

$L_M(A) \subset L_M(\mathfrak{A})$ и $L_M(\mathfrak{A}) \cap E(A) \subset L_M(A)$

очевидны, поэтому

$$L_M(A) = L_M(\mathfrak{A}) \cap E(A);$$

(ii) Пусть a произвольный элемент из $L^*_M(A)$ через $\mathcal{B}$ обозначим сильно ассоциативную JW - подалгебру в A, порожденную спектральным семейством элемента a. Тогда по предложению I.2.I3 (ii) имеем $a \in L^*_M(\mathcal{B})$. Заметим, что $\mathcal{B} + i\mathcal{B} = \overline{\mathcal{B}}$ есть коммутативная подалгебра фон Неймана в $\mathfrak{A}$.

Тогда в силу теоремы 2.3.I5 (I) [25] имеем

$$L^*_M(\overline{\mathcal{B}}) = L^*_M(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{L}(\overline{\mathcal{B}}),$$ поэтому

$a \in L^*_M(\mathfrak{A})$. С другой стороны для всякого a

$a \in L^*_M(\mathfrak{A}) \cap E(A)$ $ab \in L_1(\mathfrak{A})$, где $b \in L_N(\mathfrak{A})$.

В частности, $ab \in L_1(\mathfrak{A})$ для $b \in L_N(A)$, а поэтому $a \circ b = 1/2\,(ab + ba) \in L_1(A)$. Значит

$a \in L^*_M(A)$, что доказывает пункт (ii).

(iii). Доказательство данного пункта следует из неравенства:

$\|a\|_M = \|a\|^A_M = \sup\{|\tau(ab)|,\ b \in L_N(A),\ \tau(N(|b|)) \leq 1\} \leq$

$\leq \sup\{|\tau(ab')|,\ b' \in L_N(\mathfrak{A}),\ \tau(N(|b'|)) \leq 1\} = \|a\|^{\mathfrak{A}}_M$.

Теорема доказана.

Следует отметить, что на самом деле, в пункте (iii) предложения I.2.8 имеет место точное равенство. Доказательство этого факта легко можно получить из предложения I.2.I5 (ii), сформулированного на странице 55.

Обозначим $\mathcal{P}_M(A) = \{a \in L_M(A) : \tau(M(|a|)) \leq 1\}$.

В следующем предложении приводятся простейшие свойства $\mathcal{P}_M(A)$, $L_M(A)$ и $L^*_M(A)$.

П р е д л о ж е н и е I.2.9 (I)

(i) Если $a \in L_M(A)$ и λ - такое действительное число, что $|\lambda| \leq 1$, то $\lambda a \in L_M(A)$.

(ii) Если $a \in L_M(A)$ и S - симметрия из A , то $aS \in L_M(A)$.

($\overline{ii}$) Если $a \in \mathcal{P}_M(A)$ и S - симметрия из A , то $aS \in \mathcal{P}_M(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о: (I) (i) . Пусть $a \in L_M(A)$ и $|\lambda| \leq 1$. Функция $M(u)$ выпукла. Поэтому $M(|\lambda a|) = M(|\lambda||a|) \leq |\lambda| M(|a|)$ и, так как $M(|a|) \in L_1(A)$, то $M(|\lambda a|) \in L_1(A)$, откуда следует, что $\lambda a \in L_M(A)$.

(ii) Пусть $a \in L_M(A)$ и S - симметрия из A . Так как в доказательстве участвуют только два элемента, то как отмечено в доказательстве предложения 0.20 можно считать, что A - обратимая JW - алгебра. Тогда $\hat{A}$ совпадает с OJ - алгеброй $E(A)$ всех самосопряженных операторов, присоединенных к A (см.[12]). Через $\mathfrak{A}$ обозначим обертывающую алгебру фон Неймана для A. Нетрудно заметить, что оба слагаемых в правой части равенства $a \circ s = 1/2\,(as+sa)$, суть элементы некоммутативного класса Орлича $L_M(\mathfrak{A})$, в силу [25].

Так как этот класс $L_M(\mathfrak{A})$ является выпуклым множеством (см. [25]), то $a \circ s \in L_M(\mathfrak{A}) \cap E(A)$. Следовательно, по теореме I.2.8 (i) $a \circ s \in L_M(A)$.

(II). Пусть $a \in \mathcal{P}_M(A)$ и s – симметрия из A. Проводя такие же рассуждения как при доказательстве пункта (I) (ii), мы получаем, что

$$a \circ s = 1/2\,(as+sa) \in \mathcal{P}_M(\mathfrak{A}) \cap E(A) \subset \mathcal{P}_M(A).$$

Предложение доказано.

С л е д с т в и е I.2.10. (I) Следующие условия эквивалентны:

(i) $a \in L_M(A)$;

(ii) $|a| \in L_M(A)$;

(iii) $as \in L_M(A)$ для всякой симметрии s из A.

(II) Следующие условия эквивалентны:

(i) $a \in \mathcal{P}_M(A)$;

(ii) $|a| \in \mathcal{P}_M(A)$;

(iii) $as \in \mathcal{P}_M(A)$ для всякой симметрии s из A.

Д о к а з а т е л ь с т в о: В обоих пунктах импликации (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) вытекают из определений $L_M(A)$ и $\mathcal{P}_M(A)$ соответственно. Импликация (i) $\Longleftrightarrow$ (iii)

вытекает из соответствующих пунктов предложения I.2.9.
Импликация (iii) $\Longrightarrow$ (i) очевидна. Следствие доказано.

Через A_r обозначим множество элементов a из A таких, что $\|a\|_\infty \leq r$.

Предложение I.2.II Пусть $a \in A_r$ и $\alpha = M(1) \leq 1$, тогда $a \in \mathcal{P}_M(A)$.

Так как в формулировке предложения участвует только один элемент, то доказательство дословно следует некоммутативному случаю (см. [25] предложение 2.3.I0 (i)).

Рассмотрим теперь свойства нормы Орлича.

Предложение I.2.I2 Отображение $a \longrightarrow \|a\|_M$ в пространстве $L^*_{1M}(A)$ удовлетворяем аксиомам нормы, при этом:

(i) для всякого a из $L^*_{1M}(A)$ справедливо неравенство

$$\|a\|_1 \leq \|a\|_M$$

(ii) для всякого a из $L_{1M}(A)$ справедливо неравенство

$$\|a\|_M \leq \tau(M(|a|)) + 1$$

(iii) если $a \in L^*_{1M}(A)$ и s - произвольная симметрия из A, что $\|sa\|_M \leq \|a\|_M$, в частности $\|a\|_M = \||a|\|_M$.

Доказательство.

Свойства положительности, однородности и неравенства треугольника очевидны.

(i) Пусть a произвольный элемент из $L^*_{1M}(A)$.

Рассмотрим следующие два множества чисел:

$$\mathfrak{M} = \{ |\tau(ab)| \ , \ b \in A_1 \}$$

$$\mathfrak{N} = \{ |\tau(ab')| \ , \ b' \in \mathcal{P}_M(A) \}$$

Включение $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ следует из доказанного в предложении I.2.II включания $A_\alpha \subset \mathcal{P}_M(A)$.

Поэтому $\sup\{\mathfrak{M}\} \leq \sup\{\mathfrak{N}\}$, т.е.

$$\|a\|_1 \leq \|a\|_M .$$

Докажем теперь строгую положительность нормы $\|\cdot\|_M$.

Предположим, что $\|a\|_M = 0$. В силу только, что доказанного свойства (i) получаем $\|a\|_1 = 0$, т.е. $a = \theta$.

Пусть a и b произвольные элементы из $L_M(A)$ и $\mathcal{P}_N(A)$ соответственно. Покажем, что $|\tau(ab)| \leq \tau(M(|a|)) + 1$.

Так как в доказательстве участвуют только два элемента, то как отмечено в доказательстве предложения 0,20 можно считать, что A - обратимая JW- алгебра. Тогда $\hat{A}$ совпадает с OJ-алгеброй $E(A)$ всех самосопряженных операторов присоединенных к A (см. [I2]). Через $\mathfrak{A}$ обозначим обертывающую алгебру фон Неймана для A. Тогда в силу теоремы I.2.8 (iii) и предложения 2.3.II из [25] имеем $|\tau(a \circ b)| \leq \|a\|_M^{\mathfrak{A}} \leq \tau(M(|a|)) + 1$, где $\|a\|_M^{\mathfrak{A}}$ норма Орлича в некоммутативном пространстве $L^*_M(\mathfrak{A})$. Так как мы выбрали b из $\mathcal{P}_N(A)$ произвольно, то переходя в неравенстве

$$|\tau(a \circ b)| \leq \tau(M(|a|)) + 1$$

к $\sup$ по всему множеству $\mathcal{P}_N(A)$, получим:

$$\sup\{|\tau(a\circ b)|\} \le \tau(M(|a|))+1,$$

откуда следует (ii).

Пусть $a \in L^*_M(A)$ и s - симметрия из A. Тогда

$$\|as\|_M = \sup\{|\tau((as)b)|,\ b\in \mathcal{P}_N(A)\} =$$

$$\sup\{|\tau(a(sb))|,\ b\in\mathcal{P}_N(A)\} = \sup\{|\tau(ab')|,$$

$$sb=b'\in\mathcal{P}_N(A)\} \le \sup\{|\tau(ab')|,\ b'\in\mathcal{P}_N(A)\} = \|a\|_M .$$

Всякий a из A имеет полярное разложение $a=|a|s$, где s - некоторая симметрия из A. По теореме 0.4 элементы a, $|a|$, s лежат в некоторой сильно ассоциативной подалгебре A_0 и поэтому $|a| = as$. Тогда, используя вышеизложенные рассуждения этого пункта, мы получаем $\||a|\|_M \le \|a\|_M$ и $\|a\|_M \le \||a|\|_M$, т.е. $\|a\|_M = \||a|\|_M$.

Предложение доказано.

Следует отметить, что в пункте (iii) предложения I.2.I2 в общем случае равенство не имеет места. В самом деле, пусть s и t антикоммутирующие симметрии, т.е. $s\circ t = 1/2(st+ts)=0$.

Тогда

$$\|s\|_M = \sup\{|\tau(sb)|,\ b\in\mathcal{P}_N(A)\} = \sup\{|\tau(U_s b)|,$$

$$b\in\mathcal{P}_N(A)\} = \sup\{|\tau(b)|,\ b\in\mathcal{P}_N(A)\} \ne 0, \text{ но } \|s\circ t\|_M = 0 .$$

Пусть $\mathcal{B}(a)$ означает сильно ассоциативную JBW - подалгебру в A , порожденную спектральным семейством элемента a , а $\hat{\mathcal{B}}$ OJ- алгебра измеримых элементов для $\mathcal{B}(a)$.

П р е д л о ж е н и е. I.2.I3 Пусть $a \in L^*_M(A)$. Тогда a лежит в $L^*_M(\mathcal{B}(a))$ и $L_M(\mathcal{B}(a)) \subset \hat{\mathcal{B}} \cap L_M(A)$.

Так как в формулировке предложения участвует только один элемент a и его спектральное семейство, то доказательство дословно следует некоммутативному случаю (см. [25] предложение 2.3.I2)

В следующем предложении доказывается аналог неравенства Гёльдера для пространств Орлича.

П р е д л о ж е н и е I.2.I4

(i) Пусть a элемент пространства $L^*_M(A)$ и $\|a\|_M \leq 1$ тогда $\tau(M(|a|)) \leq \|a\|_M$;

(ii) для любых a и b из $L^*_M(A)$ и $L^*_N(A)$ соответственно, $ab \in L_1(A)$ и $|\tau(ab)| \leq \|a\|_M \|b\|_N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

(ii) Пусть a и b произвольные элементы из $L^*_M(A)$ и $L^*_N(A)$ соответственно. Покажем, что $ab \in L_1(A)$. Так как в доказательстве участвует только два элемента, то как отмечено в доказательстве предложения 0,20 можно считать, что A -

- обратимая JW-алгебра. Тогда $\hat{A}$ совпадает с $\mathcal{OJ}$-
- алгеброй $E(A)$ всех самосопряженных операторов присоединенных к A (см. [I2]).

Через $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ обозначим обертывающую алгебру фон Неймана для A . Тогда в силу теоремы I,2.8 и предложения 2.3.I3 (iii) из [25] имеем

$$a\,b \in L_1(\mathcal{O}\!\mathcal{L}) \cap E(A) \subset L_1(A)$$

и

$$|\tau(a \circ b)| \leqslant \|a\|_M^{\mathcal{O}\!\mathcal{L}} \|b\|_N^{\mathcal{O}\!\mathcal{L}} = \|a\|_M^A \, \|b\|_N^A \quad ,$$

где $\|a\|_M^{\mathcal{O}\!\mathcal{L}}$, $\|b\|_M^{\mathcal{O}\!\mathcal{L}}$ нормы Орлича элементов a и b в некоммутативных пространствах $L_M^*(\mathcal{O}\!\mathcal{L})$ и $L_N^*(\mathcal{O}\!\mathcal{L})$ соответственно.

(i) Так как в формулировке пункта (i) участвует только один элемент a , то доказательство (i) дословно следует некоммутативному случаю (см. [25] предложение 2.3.I3 (i)).

Преддожение доказано.

Перейдем к доказательству теоремы I.2.5

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем полноту пространства

$L_{1M}^{*}(A)$. Пусть $\{a_n\}_n$ - фундаментальная по норме $\|\cdot\|_M$ последовательность элементов из $L_{1M}^{*}(A)$. Тогда в силу предложения I.2.I2 (i) последовательность $\{a_n\}_n$ является $\|\cdot\|_1$ - фундаментальной в пространстве $L_1(A)$.

В силу полноты пространства $L_1(A)$ [I2], существует элемент $a_0 \in L_1(A)$, что $a_m \xrightarrow{\|\cdot\|_1} a_0$, т.е. $\{a_n - a_m\}_m$ сходятся к $(a_n - a_0)$ по L_1 - норме и следовательно по мере.

В силу непрерывности по мере операции умножения $\{(a_n - a_m)\,\ell\}_m$ сходится к $(a_n - a_0)\,\ell$ по мере для любого $\ell \in P_N(A)$.

Рассмотрим L_1 - норму элемента $(a_n - a_m)\,\ell$:

$$\|(a_n - a_m)\,\ell\|_1 = \tau(|(a_n - a_m)\,\ell|) =$$

$$\tau(((a_n - a_m)\,\ell)\,s) = \tau((a_n - a_m)(\ell s)) \le$$

$$\le \sup\{|\tau((a_n - a_m)\,\ell')|,\ \ell' \in P_N(A)\},$$

Здесь s - такая симметрия, что

$$(a_n - a_m)b = |(a_n - a_m)b| \cdot s$$

По условию последовательность $\{a_n\}_n$ фундаментальна по норме $\|\cdot\|_M$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n'(\varepsilon)$, что при $n, m \geqslant n'(\varepsilon)$

$$\|(a_n - a_m)b\|_1 \leqslant \|a_n - a_m\|_M < \varepsilon \quad .$$

Зафиксируем n. Тогда, в силу леммы Фату (см. § 0) мы получаем:

$$|\tau((a_n - a_0)b)| \leqslant \varepsilon$$

для любого b, а поэтому:

$$\|a_n - a_0\|_M \leqslant \varepsilon \quad .$$

Теорема доказана.

Пусть как и ранее $\mathcal{B}(a)$ означает сильно ассоциативную JBW - подалгебру в A, порожденную спектральным семейством элемента a, а $\hat{\mathcal{B}}$ OJ- алгебра измеримых элементов для $\mathcal{B}(a)$.

П р е д л о ж е н и е I.2.I5

Пусть $a \in L^*_M(A)$. Тогда нормы $\|a\|_M^{\mathcal{B}(a)}$ и

$\|a\|_M^A$ элемента a соответственно в пространствах

$L_M^*(\mathcal{B}(a))$ и $L_M^*(A)$ совпадают, и

$$L_M^*(\mathcal{B}(a)) = \widehat{\mathcal{B}} \cap L_M^*(A) .$$

Доказательство. Неравенство:

$$\|a\|_M^{\mathcal{B}(a)} \le \|a\|_M^A$$ очевидно.

Докажем обратное неравенство.

Рассмотрим произвольный элемент a из $L_M^*(A)$.

Тогда по предложению I.2.I3 $a \in L_M^*(\mathcal{B}(a))$

и норма Орлича $\|a\|_M^{\mathcal{B}(a)}$ элемента a в функциональном пространстве $L_M^*(\mathcal{B}(a))$, в силу ([23] стр. II0) будет иметь вид:

$$\|a\|_M^{\mathcal{B}(a)} = \inf_{k>0}\left\{ \frac{1}{k}\left(1 + \tau(M(|ka|))\right)\right\} ,$$

где

$$ka \in L_M(\mathcal{B}(a))$$

Так как по предложению I.2.I3 и предложению I.2.I2 (ii) для элемента ka имеет место неравенство:

$$\|ka\|_M^A \le \tau(M(|ka|)) + 1 \quad ,$$

то справедлива оценка:

$$\|a\|_M^A = \frac{1}{k}\|ka\|_M^A \le \inf\left\{\frac{1}{k}(1 + \tau(M(|ka|))),\ ka \in L_M(\mathcal{B}(a))\right\}$$

На основании этой оценки и неравенства $\|a\|_M^{\mathcal{B}(a)} \le \|a\|_M^A$ заключаем, что норма $\|a\|_M^{\mathcal{B}(a)}$ равна норме $\|a\|_M^A$.

Для доказательства равенства $L_M^*(\mathcal{B}(a)) = \hat{\mathcal{B}} \cap L_M^*(A)$ достаточно показать включение

$$L_M^*(\mathcal{B}(a)) \subset \hat{\mathcal{B}} \cap L_M^*(A),$$

т.к. обратное включение следует из предложения I.2.I3

Для всякого ненулевого элемента a из $L_M(\mathcal{B}(a))$ можно найти такое положительное число k, что

$$\|ka\|_M^{\mathcal{B}(a)} < 1 .$$

Тогда в силу равенства $\|ka\|_M^{\mathcal{B}(a)} = \|ka\|_M^A$ и предложения I.2.I4 получаем, что a лежит в $L_M(\mathcal{B}(a))$, а потому и предложению I.2.I3 $a \in L_M(A) \subset L_M^*(A)$.

Предложение доказано.

Из доказанного предложения следует, что для произвольного элемента $a \in L_M^*(A)$ имеем:

$$\|a\|_M^A = \||a|\|_M^A = \||a|\|_M^B = \|a\|_M^B .$$

Предложение доказано.

Докажем теперь, что пространство Орлича является банаховым идеальным пространством.

Т е о р е м а I.2.16. Пространство $(L_M^*(A), \|\cdot\|_M)$ - является банаховым идеальным пространством.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сперва, что $(L_M^*(A), \|\cdot\|_M)$ - НИП. Пусть $a \in L_M^*(A)$, $b \in \hat{A}$ и $|b| \leq |a|$. Так как в доказательстве участвуют только два элемента, то как отмечено в доказательстве предложения 0.20 можно считать, что A - обратимая JW - алгебра. Тогда $\hat{A}$ совпадает с OJ - алгеброй $E(A)$ всех самосопряженных операторов присоединенных к A (см. [I2]). Через $\mathfrak{A}$ обозначим обертывающую алгебру фон Неймана для A. Тогда из [25] следует, что $b \in E(A) \cap L_M^*(\mathfrak{A})$, а поэтому в силу теоремы I.28 $b \in L_M^*(A)$. Кроме того,

$$\|b\|_M \leq \|a\|_M .$$

Пусть теперь $a \in L_M^*(A)$ и $b \in A$. Покажем, что $a \circ b \in L_M^*(A)$. Так как в доказательстве участвуют только два элемента, то в силу рассуждений, приведенных выше, мы получаем:

$$a \circ b = 1/2\,(ab + ba) \in L_M^*(\mathfrak{A}) \cap E(A) = L_M^*(A) \text{ и}$$

$$\|a \circ b\|_M \leq \|b\|_\infty \|a\|_M .$$

Полнота пространства $L_M^*(A)$ была доказана в теореме I.2.8. Теорема доказана.

Докажем лемму, которая нам понадобится в дальнейшем.

Л е м м а I.2.17 Пусть $M(u)$ и $N(v)$ дополнительные друг к другу $\mathcal{N}$ - функции. Если $a \in \hat{A}$ и $ab \in L_1(A)$, для всякого $b \in L_N(A)$, тогда $a \in L^*_M(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть a произвольный элемент OJ - алгебры $\hat{A}$ и $ab \in L_1(A)$ для любого $b \in L_N(A)$. Тогда $a \in \{a' \in \hat{A},\ a' L_N(A) \subset L_1(A)\}$, т.е. $a \in L^*_M(A)$.

Лемма доказана.

Пусть $\mathcal{B}(a)$ означает сильно ассоциативную JBW-подалгебру в A, порожденную спектральным семейством элемента a, а $\hat{\mathcal{B}}(a)$ OJ- алгебру измеримых элементов для $\mathcal{B}(a)$.

Пусть L некоторое множества в $\hat{A}$.

П р е д л о ж е н и е I.2.18 Справедливы следующие два утверждения:

(i) если $L \cap \hat{\mathcal{B}}(a) = L_M(\mathcal{B}(a))$ для любого a, то $L = L_M(A)$;

(ii) если $L \cap \hat{\mathcal{B}}(a) = L^*_M(\mathcal{B}(a))$ для любого a, то $L = L^*_M(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о (ii). Пусть $a \in L$. В силу условия пункта (ii) $a \in L^*_M(\mathcal{B}(a))$. По предложению I.2.15 справедливо включение $L^*_M(\mathcal{B}(a)) \subset$

$\subset L^*_{1M}(A)$, а поэтому $a \in L^*_{1M}(A)$. В силу произвольности элемента a получаем $L_1 \subset L^*_{1M}(A)$.

Пусть b произвольный элемент из $L^*_{1M}(A)$. В силу предложения I.2.I5 $b \in L^*_{1M}(\mathcal{B}(b))$. Из условия пункта (ii) следует, что $b \in L_1$. В силу произвольности элемента b получаем $L^*_{1M}(A) \subset L_1$.

Из этого и полученного ранее включения $L_1 \subset L^*_{1M}(A)$ следует $L_1 = L^*_{1M}(A)$.

Пункт (i) доказывается аналогично, с использованием предложения I.2.I3.

Предложение доказано.

В силу [23] норма $\|a\|_M^{\mathcal{B}(a)}$ конечна для любого $a \in L^*_{1M}(A)$. Тогда из предложения I.2.I5 мы получаем следующее:

С л е д с т в и е I.2.I9 Пусть a -произвольный элемент из $L^*_{1M}(A)$, тогда норма $\|a\|_M$ элемента a конечна.

Теперь рассмотрим норму Люксембурга на пространстве $L^*_{1M}(A)$.

О п р е д е л е н и е I.2.20 Для каждого элемента $a \in L^*_{1M}(A)$, число

$$\|a\|_{(M)} = \sup\{|\tau(ab)|, b \in L^*_{1N}(A), \|b\|_N \leq 1\}$$

назовем нормой Люксембурга элемента a.

П р е д л о ж е н и е I.2.2I Отображение $a \longrightarrow \|a\|_{(M)}$ в пространстве $L^*_{1M}(A)$ удовлетворяет аксиомам нормы, при этом:

(i) для всякого a из $L^*_{1M}(A)$ справедливо неравенство:

$$\|a\|_{(M)} \leq \|a\|_M \leq 2\|a\|_{(M)} ;$$

(ii) если $a \in L^*_{1M}(A)$ и s - произвольная симметрия из A, то $\|sa\|_{(M)} \leq \|a\|_{(M)}$, в частности $\|a\|_{(M)} = \||a|\|_{(M)}$;

(iii) для любых элементов a и b взятых из пространств $L^*_{1M}(A)$ и $L^*_{1N}(A)$ соответственно, справедливы следующие неравенства:

$$|\tau(ab)| \leq 2\|a\|_{(M)}\|b\|_N \text{ и } |\tau(ab)| \leq 2\|a\|_M\|b\|_N .$$

Доказательство

Свойства положительности, однородности и неравенство треугольника очевидны.

(i) Пусть a произвольный элемент из $L^*_{1M}(A)$.

Рассмотрим следующие два множества чисел:

$$\mathfrak{M} = \{|\tau(ab)|,\ b \in L^*_{1N}(A) \text{ и } \|b\|_N < 1\}$$

$$\mathfrak{N} = \{|\tau(ab')|,\ b' \in L^*_{1N}(A) \text{ и } \tau(N(|b'|)) < 1\}$$

Если b из $L^*_{1N}(A)$ произвольный элемент, причем $\|b\|_N \leq 1$, тогда по предложению I.2.14 $b \in L_{1N}(A)$ и $\tau(N(|b|)) \leq 1$, а поэтому справедливо включение

$\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}$. Следовательно $\sup\{\mathfrak{m}\} \le \sup\{\mathfrak{n}\}$,

т.е. $\|a\|_{(M)} \le \|a\|_M$.

Рассмотрим еще одно множество чисел:

$$K = \{|\tau(a b'')|,\ b'' \in L_N^*(A) \text{ и } \|b''\|_N \le 2\}.$$

Если b' из $L_N(A)$ произвольный элемент, причем $\tau(N(|b'|)) \le 1$, тогда по предложению I.2.I2 (ii) $\|b'\|_N \le 2$, а поэтому справедливо включение $\mathfrak{n} \subset K$. Следовательно,

$$\sup\{\mathfrak{n}\} \le \sup\{K\}, \text{ т.е. } \|a\|_M \le 2\|a\|_{(M)}.$$

Из доказанного ранее и последнего неравенства получаем (i).

Докажем теперь строгую положительность нормы $\|\cdot\|_{(M)}$.

Предположим $\|a\|_{(M)} = 0$. В силу только, что доказанного свойства (i) получаем $\|a\|_M \le 2\|a\|_{(M)} = 0$, т.е. $a = \theta$.

Доказательство пункта (ii) проводится аналогично доказательству (iii) из предложения I.2.I2, причем $\|a\|_{(M)} = \||a|\|_{(M)}$.

Следует отметить, что в общем случае равенство в (ii) не имеет места (см. пример на стр. 5I).

Пусть a и b произвольные элементы из $L_M^*(A)$ и $L_N^*(A)$ соответственно. Докажем неравенство пункта (iii). Так как в доказательстве участвуют только два элемента, то как отмечено в доказательстве предложения 0,20 можно считать, что A - обратимая JW- алгебра. Тогда $\hat{A}$ - совпадает с OJ- алгеброй $E(A)$ всех самосопряженных операторов присоединенных к A (см. [12]). Через $\mathfrak{A}$ обозначим обертывающую алгебру фон Неймана для A. По предложению 1.2.14 (ii) имеем:

$$|\tau(a \circ b)| \leq \|a\|_M \|b\|_N$$

Так как $\|a\|_M = \|a\|_M^{\mathfrak{A}}$

и в силу предложения 1.2.15 $\|a\|_M = \|a\|_M^{\mathcal{B}(a)}$,

тогда из предлжения 2.3.19 (viii)[25] получаем :

$$\|a\|_M = \|a\|_M^{\mathfrak{A}} = \|a\|_M^{\mathcal{B}(a)} \leq k \|a\|_{(M)}^{\mathcal{B}(a)} .$$

В силу очевидного неравенства :

$$\|a\|_{(M)}^{\mathcal{B}(a)} \leq \|a\|_{(M)}$$

справедливо следующее:

$$|\tau(a \circ b)| \leq k \|a\|_{(M)} \|b\|_N .$$

Аналогично доказывается, что :

$$|\tau(a \circ b)| \leq k \|a\|_M \|b\|_{(N)} .$$

Предложение доказано.

Из пункта (i) доказанного предложения следует, что нормы Орлича и Люксембурга эквивалентны, а поэтому неассоциативное пространство $(L^*_M(A), \|\cdot\|_{(M)})$ также является банаховым идеальным пространством в $\hat{A}$.

Введенная на странице 59 норма Люксембурга, будет использована нами в дальнейшем, при изучении пространства сопряженного к пространству $L^{*}_{1M}(A)$.

§ I.3 Пространства Орлича с (Δ_2) - условием.

Всюду в этом параграфе будем предполагать, что рассматриваемая JBW- алгебра содержит непрерывную сильно ассоциативную JBW- подалгебру $\mathcal{B}$, т.е. для всякого идемпотента e из $\mathcal{B}$ существует идемпотент $g \in \mathcal{B}$, такой, что $\tau(g) = 1/2\, \tau(e)$.

Напомним, что N - функция $M(u)$ удовлетворяет (Δ_2)- условию, ((Δ') - условию), если существуют постоянные $K > 0$ и $u_0 \geqslant 0$ такие, что $M(2u) \leq KM(u)$ (соответственно $M(uv) \leq KM(u)M(v)$) при $u, v \geqslant u_0$ (см. [23], стр. 35, 43).

Через $E_M(A)$ обозначим замыкание JBW- алгебры A по норме $\|\cdot\|_M$.

Предложение I.3.I Справедливо следующее включение $E_M \subset L_{1M}(A)$.

Доказательство Пусть a из $L_{1M}(A)$ и a' положительный элемент OJ- алгебры $\hat{A}$, причем $0 \leq a' \leq a$. Покажем, что $a' \in L_{1M}(A)$. Из предложения 0,20 следует $\tilde{a}'(\alpha) \leq \tilde{a}(\alpha)$. В силу того, что $M(u)$ возрастает при $u \geqslant 0$ получаем:

$$\theta \leq M(\tilde{a}')(\alpha) \leq M(\tilde{a})(\alpha)$$

В силу принадлежности элемента a классу $L_M(A)$ и предложения I.2.6 справедливо нервенство:

$$\int_0^\infty [M(a')]^\sim(\alpha)\,d\alpha \leq \int_0^\infty [M(a)]^\sim(\alpha)\,d\alpha \quad ,$$

причем интеграл в правой части конечен, следовательно a' принадлежит классу $L_M(A)$.

Рассмотрим произвольный положительный элемент a из $E_M(A)$ и пусть $\{a_n\}_n$ из A сходящаяся к элементу a по норме $\|\cdot\|_M$ последовательность, т.е. $\|a_n - a\|_M \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому найдется номер k такой, что при $n > k$ имеет место неравенство: $\|a_n - a\|_M \leq 1/2$.

В силу предложения I.2.I4 (i) элемент $2(a_n - a)$ лежит в $L_M(A)$, причем $2a_n \subset A \subset L_M(A)$ и поэтому

$2a_n \leq \|2a_n\|_\infty \mathbb{1}$. Зафиксируем n . Представим элемент a в виде: $a = 1/2(2a_n) + 1/2(2a - 2a_n)$. Через $\mathcal{B}$ обозначим сильно ассоциативную JBW-подалгебру в A , порожденную элементом $2(a - a_n)$. В силу [23] стр. 80 элемент $1/2(\|2a\|_\infty \mathbb{1} + 2(a - a_n))$ лежит в $L_M(\mathcal{B})$ и $a \leq 1/2\|2a_n\|_\infty \mathbb{1} + 1/2[2(a - a_n)]$.

Таким образом, как показано выше и из последнего неравенства следует $\int_0^{\infty}[M(\tilde{a})](\omega)d\omega<\infty$, т.е. $a\in L_{1M}(A)$.

Предложение доказано.

Т е о р е м а I.3.2 Следующие утверждения эквивалентны:

(i) функции $M(u)$ удовлетворяет (Δ_2) - условию;

(ii) $$L^*_{1M}(A)=L_{1M}(A);$$

(iii) $L_{1M}(A)$ - линейное множество;

(iv) $$L^*_{1M}(A)=E_M(A).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: Докажем импликацию (i) $\Longrightarrow$ (ii). Рассмотрим произвольный элемент a из $L^*_{1M}(A)$. Через $\mathcal{B}(a)$ -обозначим сильно ассоциативную JBW- подалгебру в A, порожденную спектральными семейством элемента a. Если функция $M(u)$ - удовлетворяет (Δ_2)- условию, то в силу теоремы 8.2 из [23] имеем

$$a\in L^*_{1M}(\mathcal{B}(a))=L_{1M}(\mathcal{B}(a))\subset L_{1M}(A).$$

В силу произвольности элемента a справедливо вложение $L^*_{1M}(A)\subset$ $\subset L_{1M}(A)$. Обратное включение следует из предложения I.2.7.

Докажем импликацию (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Рассмотрим произвольный элемент $a\neq\theta$ из $L^*_{1M}(A)$. Существует число $\beta>0$, такое, что $\|\beta a\|_M = 1$. В силу предложения I.2.I4 $\beta a \in L_{1M}(A)$. Из линейности множества $L_{1M}(A)$ следует, что $a \in L_{1M}(A)$.

В силу произвольности a и предложения I.2.7 получаем: $L^*_{1M}(A) = L_{1M}(A)$.

Доказательство импликации $(ii) \Longrightarrow (iii)$ - очевидно.

Докажем $(ii) \Longrightarrow (iv)$. Через $\mathcal{B}(a)$ обозначим сильно ассоциативную JBW- подалгебру в A порожденную спектральным семейством элемента a, причем $a \in \in L_{1M}(A)$. В силу (ii) имеем $a \in E_M(\mathcal{B}(a)) \subset E_M(A)$. Из вложения $E_M(A) \subset L_{1M}(A)$ доказанного в предложении I.3.I следует $E_M(A) = L^*_{1M}(A)$.

$(iii) \Longrightarrow (ii)$. Пусть a - произвольный элемент из $L_{1M}(A)$.

Из пункта (iii) следует, что $L_{1M}(\mathcal{B}(a))$ - линейное множество, поэтому $L_{1M}(A)$ линейное множество.

Тогда в силу теоремы 8.2 из [23] функция $M(u)$ удовлетворяет (Δ_2) - условию.

Следовательно импликация $(iii) \Longrightarrow (ii)$ доказана.

Докажем последнюю импликацию, т.е. импликацию :

$(iv) \Longrightarrow (i)$. Проводя аналогичные рассуждения как и при доказательстве $(iii) \Longrightarrow (i)$, получаем что функция $M(u)$ удовлетворяет (Δ_2) - условию.

Теорема доказана.

Следствие I.3.3. Пусть a - произвольный элемент изз $L^*_{1_M}(A)$ и функция $N(v)$ удовлетворяет (Δ_2) - условию, тогда справедливы следующие равенства:

$$(i)\quad \|a\|_{(M)} = \sup\{|\tau(ab)|,\ b\in A,\ \|b\|_N \leq 1\}$$

$$(ii)\quad \|a\|_M = \sup\{|\tau(ab)|,\ b\in P_N(A)\cap A\}$$

Доказательство

(i) Пусть в $b\in L^*_{1_N}(A)$ и $\|b\|_N \leq 1$. Т.к. функция $N(v)$ - удовлетворяет (Δ_2) - условию, то по теореме I.3.2 справедливо равенство $L^*_{1_N}(B(b)) = E_N(B(b))$ и поэтому найдется последовательность $\{b_n\}_n \subset B(b)$ такая, что $0 \leq b_n \leq |b|$ и $\{b_n\}_n$ - сходится по норме $\|\cdot\|_N$ к элементу $|b|$.

Пусть $|b|s$ - полярное разложение элемента b с симметрией s. Т.к. $s\in A$ и $b_n \in B(b)\subset A$, то $\{sb_n\}_n \subset A$.

Из предложения I.2.14 (ii) следует справедливость следующего неравенства:

$$|\tau(ab) - \tau(a(sb_n))| = |\tau(as(|b| - b_n))| \leq$$

$$\|as\|_M \, \| |b| - b_n \|_N \le \|a\|_M \, \| |b| - b_n \|_N ,$$

а поэтому
$$\tau(ab) = \lim_n \tau(a(sb_n))$$
при $n \longrightarrow \infty$.

Следовательно,

$$\|a\|_{(M)} = \sup\{|\tau(ab)|,\ b \in L^*_N(A),\ \|b\|_N \le 1\} =$$
$$\sup\{\lim_{n\to\infty} |\tau(a(sb_n))|,\ sb_n \in A,\ b_n \xrightarrow{\|\cdot\|_N} b\} =$$
$$\sup\{|\tau(ab')|,\ b' \in A,\ \|b'\|_N \le 1\}.$$

Доказательство пункта (ii) проводится аналогично.

Следствие доказано.

Следующее предложение посвящено изучению линейных непрерывных функционалов на пространстве $L^*_M(A)$.

Предложение I.3.4 (i) Пусть b произвольный элемент из $L^*_N(A)$. Тогда линейный функционал f_b представимый в виде:

(*) $f_b(a) = \tau(ab)$ для всех $a \in L^*_M(A)$ является непрерывным на пространстве $(L^*_M(A), \|\cdot\|_M)$ и справедливо равенство $\|f_b\| = \|b\|_{(N)}$.

(ii) Пусть f - непрерывной линейный функционал на пространстве $(L^*_M(A), \|\cdot\|_M)$, причем функция $M(u)$ удовлетворяет (Δ_2)-условию. Тогда в $L^*_N(A)$ найдется единственный элемент b

такой, что выполняется равенство $f = f_b(a) = \tau(ab)$ для всех $a \in L^*_N(A)$.

Доказательство (i) Из неравенства Гельдера $|\tau(ab)| \le \|a\|_M \|b\|_N$ доказанного в предложении I.2.14 следует, что функционал вида (*) является линейным непрерывным функционалом на пространстве $(L^*_M(A), \|\cdot\|_M)$.

Следуя определению нормы функционала можно написать

$$\|f_b\| = \sup_{\|a\|_M \le 1}\{|f_b(a)|\} =$$

$$\sup_{\|a\|_M \le 1}\{|\tau(ab)|\} .$$

Но $\sup\{|\tau(ab)|, \|a\|_M \le 1\}$ в силу определения I.2.20 равен $\|b\|_{(N)}$ и поэтому $\|f_b\| = \|b\|_{(N)}$.

(ii) Покажем сначала, что всякий непрерывный линейный функционал на $(L^*_M(A), \|\cdot\|_M)$ является нормальным на A.

Пусть $\{x_\alpha\}$ какая-либо убывающая к нулю сеть элементов из A. Докажем, что $\|x_\alpha\|_M \longrightarrow 0$.

Доказательство будем вести от противного. Предположим, что не для всякой убывающей к нулю сети элементов из A, норма Орлича стремится к нулю. Тогда существует сеть элементов $\{x_\alpha\} \in A_+$ и положительное число δ такие, что $x_\alpha \downarrow 0$ и $\|x_\alpha\|_M > \delta$ для всех α.

Для каждого α рассмотрим сильно ассоциативную подалгебру $B_\alpha = B(x_\alpha)$.

По предложению I.2.2I (iv) и I.2.I5 (ii) имеем:

$\|x_\alpha\|_{(M)}^{B_\alpha} \le \|x_\alpha\|_M^{B_\alpha} = \|x_\alpha\|_M \le 2\|x_\alpha\|_{(M)}^{B_\alpha}$, поэтому $\|x_\alpha\|_{(M)}^{B_\alpha} > \frac{\delta}{2}$.

Так как $\|x_\alpha\|_{(M)}^{B_\alpha} = \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{\lambda} x_\alpha \in \mathcal{P}_M(\mathcal{B}_\alpha)\right\}$ (см. [23]

стр. 95) и $A \subset L_M(A)$, то $\tau\left(M\left(\frac{2x_\alpha}{\delta}\right)\right) > 1$.

Не нарушая общности рассуждений будем считать, что

$\|x_\alpha\|_\infty \le 1$ для всякого α .

Функция $M(u)$ выпуклая и $M(0) = 0$.

Нетрудно видеть, что $M(t) \le kt$ для всех $t \le \frac{2}{\delta}$,

$k = \delta/_2 M\left(\frac{\delta}{2}\right)$, поэтому $M(x) \le kx$, когда $\|x\|_\infty < \frac{2}{\delta}$.

Так как $\|x_\alpha\|_\infty \le 1$, то $\left\|\frac{2x_\alpha}{\delta}\right\|_\infty \le \frac{2}{\delta}$.

Функция $M(u)$ возрастающая и поэтому $M\left(\frac{2}{\delta}x_\alpha\right) \le k\frac{2}{\delta}x_\alpha$.

Применяя к обеим частям последнего равенства след τ , получаем

$$\tau\left(M\left(\frac{2x_\alpha}{\delta}\right)\right) \le \tau\left(k\frac{2}{\delta}x_\alpha\right) = k\frac{2}{\delta}\tau(x_\alpha) \longrightarrow 0 .$$

С другой стороны $\tau\left(M\left(\frac{2}{\delta}x_\alpha\right)\right) > 1$. Полученное противоречие показывает, что $\|x_\alpha\|_M \longrightarrow 0$ для любой сети $\{x_\alpha\}$ из A убывающей к θ .

Таким образом, для всякой сети $\{x_\alpha\}$ из A убывающей к θ , имеем

$|f(x_\alpha)| \le \|f\|\|x_\alpha\|_M \longrightarrow 0$, т.е. всякий линейный непрерывный функционал f на $L^*_M(A)$ нормален на A. Далее: так как f – непрерывный нормальный линейный функционал на A, то по [I2] теореме 4.3 для всякого $a \in A$, существует $b \in L_1(A)$ такой, что $f(a) = f_b(a) = \tau(ab)$. Пусть теперь $a \in L^*_M(A)$ и пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность элементов из A такая, что $a_n \xrightarrow{\|\cdot\|_M} a$ в $L^*_M(A)$. Так как $a_n \longrightarrow a$ по мере, то $a_n b \longrightarrow ab$ также по мере. Мы имеем:

$$\|a_n b - a_m b\|_1 = \sup\{|\tau((b(a_n - a_m))x)|, x \in A, \|x\|_\infty \le 1\} =$$

$$= \sup\{|f(a_n - a)x|, x \in A, \|x\|_\infty \le 1\} \le \|f\|\|a_n - a_m\|_M,$$

следовательно, $a_n b \xrightarrow{\|\cdot\|_1} ab$ и $f(a) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) =$

$$= \lim_{n \to \infty} \tau(a_n b) = \tau(ab).$$

По лемме I.2.I7 $b \in L^*_N(A)$. Предложение доказано.

Заметим, что если функция $M(u)$ не удовлетворяет (Δ_2)-условию, то $E_M(A)$ – собственное подмножество в $L^*_M(A)$. Это приводит нас к следующему предложению:

П р е д л о ж е н и е I.3.5. Если функция $M(u)$ не удовлетворяет (Δ_2)- условию, то (*) не является общим видом линейного непрерывного функционала на $L^*_M(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть $M(u)$ не удовлетворяет (Δ_2)- условию. Рассмотрим элемент $a \in L^*_M(A) \setminus E_M(A)$ (см. теорему I.3.2). Определим на $L^*_M(A)$ функционал f следующим образом:

$f(a_0)=1$ и $f(a_1)=0$ для каждого $a_1 \in E_M(A)$ и продолжим его по теореме Хана-Банаха на $L^*_M(A)$ с сохранением нормы.

Допустим, что существует элемент $b \in L^*_N(A)$ такой, что $f(a)=\tau(ab)$ для каждого $a \in L^*_M(A)$.

Имеем:

$f(a)=\tau(ab)=\tau(as|b|)$, где $b=s|b|$ полярное разложение элемента b с симметрией s .

Рассмотрим функционал $f_1(a)=f(as)$. Тогда

$$f_1(a)=f(as)=\tau((as)(s|b|))=\tau(a(s(s|b|))).$$

Учитывая совместность s и b , имеем $s(s|b|)=|b|$.

Поэтому $f_1(a)=\tau(a|b|)$ и $f_1(a_0 s)=f((a_0 s)s)=$

$$=\tau(((a_0 s)s)b)=\tau((a_0 s)(sb))=\tau((a_0 s)|b|)=$$

$$=\tau(a_0(s|b|))=\tau(a_0 b)=f(a_0)=1.$$

Обозначим через $p_n=\{|b|\leq n 1\}$. Ясно, что

$$p_n \in A \subset E_M(A) \text{ и } \tau(p_n|b|)=f_1(p_n)=f(p_n b)=0.$$

Но $p_n|b| \geq \theta$. Следовательно, $p_n|b|=\theta$ для любого n . Отсюда $|b|=\theta$, т.е. $b=\theta$. Значит $f_1 \equiv 0$ вопреки построению. Предложение доказано.

Итак, функционал f нельзя представить в виде $(*)$ несмотря на то, что он линеен и непрерывен на $L^*_{1M}(A)$

Выясним теперь вопрос о рефлексивности неассоциативных пространств Орлича.

Т е о р е м а I.3.6

(i) Отображение $в\ b \longrightarrow f_b$ является изометрическим изоморфизмом между пространствами $(L^*_{1M}(A), \|\cdot\|_M)$ и $(L^*_{1N}(A), \|\cdot\|_{(N)})$ в том и только в том случае, если функция $M(u)$ удовлетворяет условию (Δ_2).

Неассоциативное пространство Орлича $(L^*_{1M}(A), \|\cdot\|_M)$ рефлексивно тогда и только тогда, когда функции $M(u)$ и $N(v)$ удовлетворяют условию (Δ_2).

Д о к а з а т е л ь с т в о.

(i) Пусть функция $M(u)$ - удовлетворяет (Δ_2) - условию. Тогда по предложению I.3.4 (i) для всякого b из $(L^*_{1N}(A), \|\cdot\|_{(N)})$ отображение $f_b(a) = \tau(ab)$ задает непрерывный линейный функционал на $(L^*_{1M}(A), \|\ \|_M)$ и наоборот, в силу предложения I.3.4 (ii) всякий функционал на

$\left(L^*_M(A), \|\cdot\|_M\right)$ имеет вид f_ε , причем $\|f_\varepsilon\| = \|\varepsilon\|_{(N)}$, при этом соотношении $\varepsilon \longrightarrow f_\varepsilon$ является линейным изоморфизмом между пространствами $\left(L^*_M(A), \|\cdot\|_M\right)$ и $\left(L^*_N(A), \|\cdot\|_{(N)}\right)$.

Докажем теперь пункт (ii)

По пункту (i) и свойству Δ_2 для функции $M(u)$ имеем

$$\left(L^*_M(A), \|\cdot\|_M\right)^* = \left(L^*_N(A), \|\cdot\|_{(N)}\right).$$

Следовательно

$$\left(L^*_M(A), \|\cdot\|_M\right)^{**} = \left(L^*_N(A), \|\cdot\|_{(N)}\right)^*.$$

В силу эквивалентности норм Орлича и Люксембурга (см. предложение I.2.2I) пространства $\left(L^*_N(A), \|\cdot\|_{(N)}\right)^*$ и $\left(L^*_N(A), \|\cdot\|_N\right)^*$ изоморфны (не обязательно изометричны). В силу пункта (i) и (Δ_2) - условия для функции $N(v)$ пространства $\left(L^*_N(A), \|\cdot\|_N\right)^*$ и $\left(L^*_M(A), \|\cdot\|_{(M)}\right)$ изометрически изоморфны. В силу эквивалентности норм $\|\cdot\|_{(M)}$ и $\|\cdot\|_M$ получаем, что пространства $\left(L^*_M(A), \|\cdot\|_{(M)}\right)$ и $\left(L^*_M(A), \|\cdot\|_M\right)$ изоморфны. Итак имеем следующую цепочку изоморфизмов:

$$\left(L^*_M(A), \|\cdot\|_M\right)^{**} = \left(L^*_N(A), \|\cdot\|_{(N)}\right)^* \approx$$

$$\approx \left(L^*_N(A), \|\cdot\|_N\right)^* \overset{\Delta_2}{=} \left(L^*_M(A), \|\cdot\|_{(M)}\right) \approx$$

$$\approx \left(L^*_M(A), \|\cdot\|_{(M)}\right),$$ где знак „=" означает изометрический изоморфизм, а знак „$\approx$" означает линейный изоморфизм.

Следовательно, пространства $\left(L^*_M(A), \|\cdot\|_M\right)^{**}$ и $\left(L^*_M(A), \|\cdot\|_M\right)$ линейно изоморфны, т.е. пространство $\left(L^*_M(A), \|\cdot\|_M\right)$ полурефлексивно (см. [22] § 4.2).

А так как для нормированных пространств понятия полурефлексивности и рефлексивности совпадают (см. [22] стр. 192), то пространство $\left(L^*_M(A), \|\cdot\|_M\right)$ - рефлексивно.

Необходимость выполнения (Δ_2) - условия для функций $M(u)$ и $N(v)$ следует из пункта (i) .

Теорема доказана

§ I.4. Линейные операторы в пространствах Орлича .

В настоящем параграфе рассматриваются условия непрерывности линейного интегрального оператора. Так как на сегодняшний день мы не имеем хорошего определения тензорного произведения общих йордановых алгебр (см. [45],[65]), то все утверждения использующие технику тензорного произведения элементов сформулированы для случая обратимых JW - алгебр. Это условие дает нам возможность пользоваться тензорным произведением обертывающих алгебр Фон Неймана.

Пусть $\mathfrak{A}$ обертывающая алгебра Фон Неймана для обратимой JW - алгебры A , а через τ обозначим след на A и его продолжение на $\mathfrak{A}$. Через $A \otimes A$ обозначим JW - подалгебру в $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$, содержащую все элементы вида $a \otimes b$, где $a, b \in A$, а через $\mathbb{1} \otimes A$ JW - подалгебру в $A \otimes A$ состоящую из элементов вида $\mathbb{1} \otimes A$, где $a \in A$. Аналогично определяется JW - подалгебра $A \otimes \mathbb{1}$ в $A \otimes A$.

По теореме 0.2I существует условное математическое ожидание $M : L_1(A \otimes A) \longrightarrow L_1(\mathbb{1} \otimes A) \cong L_1(A)$.

Через $\hat{L}_M(A)$, $\hat{L}^*_M(A)$ будем обозначать соответственно класс и пространство Орлича, построенные на $A \otimes A$. Пусть $N_1(v)$ и $N_2(v)$ обозначают N - функции, дополнительные к заданным N - функциям $M_1(u)$ и $M_2(u)$.

Т е о р е м а I.4.I. Пусть Φ N - функция, обладающая свойствами:

(I) если $T \in L^*_{\mu_1}(A)$, $S \in L_{\mathcal{N}_2}(A)$, то $T \otimes S \in \hat{L}^*_{\Phi}(A)$

(2) $\|T \otimes S\|_{\Phi} \le \ell \|T\|_{\mu_1} \cdot \|S\|_{\mathcal{N}_2}$, где ℓ - постоянная.

Пусть $R \in \hat{L}^*_{\psi}(A)$, где ψ - $\mathcal{N}$ - функция дополнительная к $\mathcal{N}$ - функции Φ. Тогда оператор

$$(*) \qquad K_R(T) = M_{L_1(A)}(R \cdot (T \otimes 1))$$

есть непрерывный оператор из $L^*_{\mu_1}(A)$ в $L^*_{\mu_2}(A)$.

Доказательство. В силу неравенства Гельдера (§ I.2) и (2) при $T \in L^*_{\mu_1}(A)$, $S \in L^*_{\mathcal{N}_2}(A)$ имеем:

$$(a) \quad \tau(|K_R(T)(1 \otimes S)|) = \tau(|M_{L_1(A)}(R(T \otimes 1))(1 \otimes S)|) =$$

$$= \tau(|M_{L_1(A)}(R(T \otimes S))|) \le \tau(|R(T \otimes S)|) =$$

$$= \tau(U(R(T \otimes S))) = \tau((UR)(T \otimes S)) \le$$

$$\le \|UR\|_{\psi} \|T \otimes S\|_{\Phi} \le \ell \|R\|_{\psi} \|T\|_{\mu_1} \|S\|_{\mathcal{N}_2}$$

(здесь $R(T \otimes S) = U|R(T \otimes S)|$ - полярное разложение оператора $R(T \otimes S)$). Из полученного неравенства (а) следует, что оператор $K_R(\cdot)$ действует из

$L^*_{\mu_1}(A)$ в $L^*_{\mu_2}(A)$.

Так как $\|S\|_{N_2} \le 2$ при $S \in \mathcal{P}_{N_2}(A)$, то из

(а) вытекает, что

(б) $$\|K_R(T)\|_{\mu_2} = \sup\{|\tau(K_R(T)(1 \otimes S))|, S \in \mathcal{P}_{N_2}(A)\} \le$$

$$\le 2\ell \|R\|_\psi \cdot \|T\|_{\mu_1} .$$

Таким образом, оператор $K_R(\cdot)$ ограничен и следовательно непрерывен. Теорема доказана.

Из неравенства (б) получаем оценку для нормы оператора $K_R(\cdot)$.

(в) $$\|K_R(\cdot)\| = \sup_{\|T\|_{\mu_1} \le 1} \|K_R(T)\| \le 2\ell \|R\|_\psi .$$

Для выяснения вопроса о существовании функции $\Phi(u)$, удовлетворяющей условию теоремы I.4.I докажем несколько вспомогательных результатов.

О п р е д е л е н и е I.4.2 [29] . Пусть $\mathcal{L}$ - гильбертово пространство и $g(\lambda, \mu)$ $(-\infty < \lambda, \mu < +\infty)$ семейство проекторов, обладающих свойствами:

I) $g(\lambda, \mu)$ возрастает по каждому переменному;

2) $g(\lambda,\mu)\cdot g(\lambda',\mu') = g(\lambda'',\mu'')$, где $\lambda'' = min(\lambda,\lambda')$, $\mu'' = min(\mu,\mu')$;

3) $\lim\limits_{\mu,\lambda \to +\infty} (\lambda,\mu) = 1$ $\lim\limits_{\lambda,\mu \to -\infty} g(\lambda,\mu) = \theta$.

Семейство удовлетворяющее свойствам I) – 3) называется двупараметрическим спектральным семейством.

Пусть $a(\lambda,\mu)$ – борелевская ограниченная функция, тогда определен интеграл вида:

$$T_a = \iint a(\lambda,\mu)\, dg(\lambda,\mu).$$

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 22 стр.302 из [I7].

Т е о р е м а I.4.3. Соответствие $\varphi : a \longrightarrow T_a$ есть $*$ – изоморфизм алгебры $\mathfrak{R}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ всех ограниченных борелевских функций на алгебру фон Неймана $C \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Этот изоморфизм продолжается до $*$ – изоморфизма алгебры $\mathcal{F}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ всех борелевских функций на алгебру всех измеримых операторов $S(C)$, присоединенных к C.

Пусть T, S – самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H, $T=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda\, de(\lambda)$, $S=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mu\, df(\mu)$ – их спектральные разложения.

Через $\mathfrak{A}_1$ обозначим алгебру всех операторов вида:

$$A_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} a_1(\lambda)\, de(\lambda),$$

а через $\mathfrak{A}_2$ обозначим алгебру всех операторов вида:

$$A_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} a_2(\mu)\, df(\mu),$$ где $a_1(\cdot)$ и $a_2(\cdot)$ – ограниченные борелевские функции.

Через $S(\mathfrak{A}_i)$ обозначим алгебру всех измеримых операторов, присоединенных к $\mathfrak{A}_i$ $(i=1,2)$.

Положим $\mathcal{L} = H \otimes H,\ g(\lambda,\mu) = e(\lambda) \otimes f(\mu)$. Тогда $g(\lambda,\mu)$ является двупараметрическим спектральным семейством. Пусть $\varphi : a \longrightarrow T_a$ $*$ - изоморфизм из теоремы I.4.3, а C соответствующая алгебра фон Неймана. Тогда справедлива:

Т е о р е м а I.4.4. При $*$ - изоморфизме φ алгебра $\mathcal{F}_1$ функции вида $a_1(\lambda,\mu) = a'(\lambda)$ переходит в алгебру $S(\mathfrak{A}_1 \otimes \mathbb{1})$. Аналогично алгебра $\mathcal{F}_2$ функций вида $a_2(\lambda,\mu) = a''(\mu)$ переходит в алгебру $S(\mathbb{1} \otimes \mathfrak{A}_2)$.

С л е д с т в и е I.4.5. Пусть Φ некоторая $\mathcal{N}$ - функция и $L_\Phi(C)$ (соответственно $L^*_\Phi(C)$) обозначает класс (соответственно пространство) Орлича. Тогда $*$ - изоморфизм φ переводит $L_\Phi(C)$ на $L_\Phi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, d\nu)$ и $L^*_\Phi(C)$ на $L^*_\Phi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, d\nu)$, где $d(\tau(e(\lambda))) \times d(\tau(f(\mu))) = d\nu$.

П р е д л о ж е н и е I.4.6. Пусть $\mathcal{N}$ - функция $\Phi(u)$ определена как дополнительная к $\mathcal{N}$ - функции $\psi(v) = \mu_2[N_1(v)]$. Тогда выполняются условия (I) и (2) теоремы I.4.I.

Д о к а з а т е л ь с т в о: следует из леммы 15.I [23] и следствия I.4.5.

Аналогично доказывается следующее

П р е д л о ж е н и е I.4.7. Пусть N - функция $\Phi(u)$ определена как дополнительная к N - функции

$$\psi(v) = N_1[\mu_2(v)] .$$

Тогда выполняются условия (I) и (2) теоремы I.4.I.

Пусть $Q(u)$ и $R(u)$ - две N - функции. Напомним, что соотношение $Q(u) \prec R(u)$ означает существование таких постоянных k и $u_0 > 0$, что

$$Q(u) \leq R(ku) \qquad u \geqslant u_0 .$$

Докажем теперь важную теорему о непрерывности.

Т е о р е м а I.4.8. (Достаточные условия непрерывности). Пусть $\Phi(u)$ и $\psi(v)$ дополнительные друг к другу N -функции. Пусть ядро k линейного интегрального оператора (*) принадлежит пространству $\hat{L}^*_\psi(A)$. Тогда оператор (*) является непрерывным оператором из $L^*_{\mu_1}(A)$ в $L^*_{\mu_2}(A)$ если выполнено одно из следующих условий:

а) $\mu_2[N_1(v)] \prec \psi(v)$;

б) $N_1[\mu_2(v)] \prec \psi(v)$;

в) функция $\Phi(u)$ удовлетворяет Δ' - условию, определенному в § I.3, и $N_1(v) \prec \psi(v)$, $\mu_2(v) \prec \psi(v)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего следует отметить, что классический функциональный вариант настоящей теоремы (см. [23], теорема I5.4, стр. I68) формулируется идентичным образом. В силу следствия I.4.5, мы попадаем в условия этой классической теоремы о достаточных условиях непрерывности, из которой вытекает доказываемое предложение. Теорема доказана.

Т е о р е м а I.4.9. Пусть $\Phi(u)$ и $\Psi(v)$ дополнительные друг к другу N - функции и оператор $R \in \hat{E}_{\psi}(A)$. Тогда каждое из условий:

а) $\mu_2[N_1(v)] \prec \Psi(v)$;

б) $N_1[\mu_2(v)] \prec \Psi(v)$;

в) функция $\Phi(u)$ удовлетворяет Δ' - условию и

$$N_1(v) \prec \Psi(v) \quad \text{и} \quad \mu_2(v) \prec \Psi(v),$$

достаточно для того, чтобы оператор (*) был вполне непрерывным.

Прежде чем доказывать эту теорему рассмотрим несколько вспомогательных лемм.

Л е м м а I.4.10. Пусть $\mathfrak{A}$ - алгебра фон Неймана, τ - точный нормальный конечный след на $\mathfrak{A}$, $M(u)$ N- - функция, дополнительная к N - функции $N(v)$, E - проектор из $\mathfrak{A}$. Тогда:

$$\|E\|_M \leq 2\tau(E)N^{-1}\left(\frac{1}{\tau(E)}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{B}$ - некоторая сильно ассоциативная подалгебра в JBW - алгебре $\mathfrak{A}_h$, содержащая проектор E. Следовательно, по предложению I.2.I3 (ii), E является элементом функционального пространства Орлича $L^*_M(\mathcal{B})$. При этом, проектор E по теореме 0,8, § 0 отождествляется с некоторой характеристи-

ческой функцией, которую мы также будем обозначать E .
Тогда справедливость доказываемого неравенства будет следовать из формулы для нормы характеристической функции, рассмотренной в ([23], стр. 89), а именно:

$$\|E\|_{\mu} = \tau(E) N^{-1}\left(\frac{1}{\tau(E)}\right).$$

Лемма доказана.

Л е м м а I.4.II. Пусть $\mathfrak{A}$ - алгебра фон Неймана в гильбертовом пространстве H , τ - точный нормальный конечный след на $\mathfrak{A}$. Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, $T \in \mathfrak{A}$ и пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ сильно сходится к T . Тогда можно указать подпоследовательность $\{T_{n_j}\}_j$ такую, что $\{T_{n_j}\}_j$ сходится к T по норме Орлича $\|\cdot\|_{\mu}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится сильно к T , то $\sup\limits_{n}\|T_n\|_{\infty} = B < +\infty$
Можно указать подпоследовательность $\{T_{n_j}\}_j \subset \mathfrak{A}$ такую, что $\{T_{n_j}\}$ сходится к T почти равномерно (см. [46]). Пусть $\varepsilon > 0$, тогда существует проектор $E \in \mathfrak{A}$ такой, что:

I) $\lim\limits_{j\to\infty}\|(T_{n_j} - T)E\|_{\infty} = 0$;

2) $\tau(\mathbb{1} - E) < \varepsilon$.

Тогда $\|T_{n_j} - T\|_{\mu} \leq \|(T_{n_j} - T)E\|_{\mu} +$

$$+\|(T_{n_j}-T)(\mathbb{1}-E)\|_{\mu} \le \|(T_{n_j}-T)E\|_{\infty}\|\mathbb{1}\|_{\mu}+\|T_{n_j}-T\|_{\infty}\cdot$$

$$\cdot\|\mathbb{1}-E\|_{\mu};$$

$$\|T_{n_j}-T\|_{\infty}\|\mathbb{1}-E\|_{\mu} \le 2B\tau(\mathbb{1}-E)N^{-1}\left(\frac{1}{\tau(\mathbb{1}-E)}\right) \le 2B\varepsilon N^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Лемма доказана.

Л е м м а I.4.I2 (О сепарабельности). Пусть $\mathfrak{A}$ - алгебра фон Неймана в сепарабельном гильбертовом пространстве H, τ - точный нормальный конечный след на $\mathfrak{A}$, $E_{\mu}(\mathfrak{A})$ замыкание $\mathfrak{A}$ в $L^{*}_{\mu}(\mathfrak{A})$ по норме Орлича $\|\cdot\|_{\mu}$, тогда $E_{\mu}(\mathfrak{A})$ сепарабельное множество.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть $\mathfrak{M}'$ счетное подмножество в $\mathfrak{A}$, всюду плотное в сильной операторной топологии в единичном шаре $\mathfrak{A}$. Через $\mathfrak{M}$ обозначим множество элементов вида $r.T$, где r - рациональное число, $T \in \mathfrak{M}'$. Тогда $\mathfrak{M}$ будет всюду плотно в сильной топологии в любом шаре $\mathfrak{A}$. Пусть $S \in E_{\mu}(\mathfrak{A})$, $\varepsilon > 0$, тогда найдется $S' \in \mathfrak{A}$ такое, что $\|S-S'\|_{\mu} < \varepsilon$.

Существует последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$ со свойствами:

1) $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится сильно к S';

2) $\|T_n\|_{\infty} \le \|S'\|_{\infty}$.

Таким образом лемма следует из доказанной выше леммы I.4.II. Лемма доказана.

Л е м м а I.4.I3. Пусть $\mathfrak{R}$ имеет вид: $\mathfrak{R}=\sum_{k=1}^{n} T_k \otimes S_k$, где $T_k, S_k \in \mathfrak{A}$. Тогда оператор (*) - конечномерный, в частности, вполне непрерывный.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Очевидно, можно считать, что $\mathfrak{R}=T\otimes S$. Тогда $K_{\mathfrak{R}}(V)=T\cdot\tau(VS)$ - одномерный оператор. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы I.4.9. Покажем, что для каждого $\varepsilon>0$ существует конечномерный оператор $\widetilde{K}(\cdot)$ такой, что:

$$\|K_{\mathfrak{R}}-\widetilde{K}\|\le\varepsilon$$

Для заданного $\varepsilon>0$ можно указать $W\in\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}$ такое, что $\|W-\mathfrak{R}\|_{\psi}\le\varepsilon$. Существует последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}$, обладающая следующими свойствами (см. [58], § 7).

I) $T_n=\sum L_k^{(n)}\otimes P_k^{(n)}$, $L_k^{(n)}, P_k^{(n)}\in\mathfrak{A}$.

2) $T_n \longrightarrow W$ сильно.

По лемме I.4.I2 существует подпоследовательность $\{T_{n_j}\}_j$, такая, что $\{T_{n_j}\}_j$ сходится к W по норме Орлича. Тогда найдется такое j', что $\|W-T_{n_{j'}}\|_{\psi}<\varepsilon$. Но тогда $\|T_{n_{j'}}-\mathfrak{R}\|_{\psi}\le 2\varepsilon$. Пусть $\widetilde{K}(T)=M_{L_1(\mathfrak{A})}(T_{n_{j'}}(\mathbb{1}\otimes T))$.

По лемме I.4.I3 оператор $\widetilde{K}$ является конечномерным, а по (b)

$$\|K_{R_\varepsilon}-\widetilde{K}\| \le \ell \, \|T_{n_{j'}}-R_\varepsilon\| \le 2\ell\varepsilon .$$

Теорема доказана.

§ I.5 Пространства Орлича, построенные по выпуклым функциям.

Пусть как и в предыдущем параграфе A JBW - алгебра с точным нормальным конечным следом τ, а $\hat{A}$ - OJ - алгебра измеримых элементов для A.

Определение I.5.I. Вещественная положительная на $[0,+\infty)$ функция $M(u)$ называется функцией Орлича, если выполнены следующие условия:

(i) $M(u)$ - выпуклая функция; (ii) $M(u)=0$ лишь при $u=0$.

Говорят, что функция Орлича $M(u)$ удовлетворяет (Δ_2) - условию, если существуют постоянные $k>0$ и $u_0 \geqslant u$ такие, что $M(2u)\le kM(u)$ при $u\geqslant u_0$.

Заметим, что из теоремы I0.4 [20] стр. 43 следует непрерывность функции Орлича.

В § 0 для каждого элемента $a\in\hat{A}$ была определена функция $\widetilde{a}:(0,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty)$

$$\widetilde{a}(\alpha)=\inf\{\lambda\in[0,+\infty):\tau(\mathbb{1}-e_\lambda)\le\alpha\},$$ где

$\{e_\lambda\}$ - спектральное семейство элемента $|a|$

Так как $\tau(e_\lambda)\le\tau(\mathbb{1})$, то $\widetilde{a}:(0,\tau(\mathbb{1})]\longrightarrow[0,+\infty)$.

П р е д л о ж е н и е I.5.2. Если $a \in \hat{A}$ и $a > 0$, то $[M(a)]^{\sim} = M(\tilde{a})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, сначала, что $M(u)$ непрерывная функция и $M(0) = 0$. Следовательно $M(u)$ строго возрастает. Тогда доказательство предложения I.5.2 следует из предложения I.2.6 из § I.2.

О п р е д е л е н и е I.5.3 Классом Орлича, порожденным функцией Орлича $M(u)$, назовем множество

$$L_M(A) = \{ a \in \hat{A} : M(|a|) \in L_1(A) \}.$$

П р е д л о ж е н и е I.5.4 Справедливы следующие два включения: $A \subset L_M(A) \subset L_1(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вложение $A \subset L_M(A)$ доказывается также как и в предложении I.2.7.
Пусть a - произвольный элемент из $L_M(A)$ т.к. $M(u)$ выпукла, то при $\alpha \leq 1$ имеем $\alpha \leq \frac{M(\alpha)}{M(1)}$. Поэтому при любом $\alpha \in [0, \infty)$ справедливо неравенство $\alpha \leq \frac{M(\alpha)}{M(1)} + 1 \cdot \chi_{[0,1]}(\alpha)$. Если в последнем неравенстве α заменить на $\tilde{a}(\alpha)$, то получим

$$\tilde{a}(\alpha) \leq \frac{M(\tilde{a}(\alpha))}{M(1)} + \chi_{[0,1]}(\tilde{a}(\alpha)).$$

Функция $\chi_{[0,1]}(\tilde{a}(\alpha))$ равна 1 на отрезке $[\tilde{a}^{-1}(1), \tilde{a}^{-1}(0)]$, поэтому $\chi_{[0,1]}(\tilde{a}(\alpha)) \in L_1([0, \tau(1)])$. Таким образом $\tilde{a}(\alpha) \in L_1([0, \tau(1)])$. В силу произвольности a и предложения 0,20 получаем $L_M(A) \subset L_1(A)$.

Т е о р е м а I.5.5. $a \in L_M(A)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{a}(\alpha) \in L_M([0, \tau(1)], \mu)$, где μ - мера Лебега.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть a произвольный элемент из $L_M(A)$. Тогда из равенства

$$\int_0^{\tau(\mathbb{1})} M(\tilde{a}(\alpha))d\alpha + \int_{\tau(\mathbb{1})}^{\infty} M(\tilde{a}(\alpha))d\alpha = \int_0^{\infty} M(\tilde{a}(\alpha))d\alpha < \infty$$

следует, что $\int_0^{\tau(\mathbb{1})} M(\tilde{a}(\alpha))d\alpha < \infty$, а поэтому

$\tilde{a}(\alpha) \in L_M([0,\tau(\mathbb{1})],\mu)$.

Пусть $a \in \hat{A}$ такой, что $\tilde{a}(\alpha) \in L_M([0,\tau(\mathbb{1})],\mu)$.

Так как $\tau(\mathbb{1}-e_\lambda) \le \tau(\mathbb{1})$ и $\tilde{a}(\alpha)$ убывающая функция (см. [62]), то $\tilde{a}(\alpha) \longrightarrow 0$ при $\alpha \longrightarrow 0$. Так как $M(0)=0$, то $\int_{\tau(\mathbb{1})}^{\infty} M(\tilde{a}(\alpha))d\alpha = 0$.

Следовательно, $a \in L_M(A)$. Теорема доказана.

Предложение I.5.6. Если функция Орлича $M(u)$ удовлетворяет (Δ_2) - условию, то $L_M(A)$ - линейное пространство.

Доказательство. Пусть λ и μ произвольные действительные числа, a и b элементы из $L_M(A)$. Тогда по предложению 0.20 из § 0 $(\lambda a + \mu b)^{\sim}(\alpha+\beta) \le$ $\le |\lambda|\tilde{a}(\alpha) + |\mu|\tilde{b}(\beta)$. Так как функция $M(u)$ удовлетворяет (Δ_2) - условию, то $M(|\lambda|\tilde{a}(\alpha)) \le M(2^m\tilde{a}(\alpha)) +$

$+M(2^m u_0) \le k^m M(\tilde{a}(\alpha)) + M(2^m u_0)$ для некоторого $m \in N$. Аналогично, $M(|\mu|\tilde{b}(\beta)) \le k^n M(\tilde{b}(\beta)) + M(2^n u_0)$ для некоторого $n \in N$. Таким образом, мы получаем следующее неравенство:

$$M[(\lambda a+\mu b)^{\sim}(\alpha+\beta)] \le k^m M(\tilde{a}(\alpha)) + k^n M(\tilde{b}(\beta)) +$$

$$+ M(2^m u_0) + M(2^n u_0).$$

Проинтегрируем обе части полученного неравенства, переходя к одним и тем же переменным интегрирования. Тогда

$$\int_0^{\tau(1)} M(\lambda a+\mu b)^{\sim}(2\alpha)\,d\alpha \le k^m \int_0^{\tau(1)} M(\tilde{a}(\alpha))\,d\alpha +$$

$$+ k^n \int_0^{\tau(1)} M(\tilde{b}(\alpha))\,d\alpha + \tau(1)[M(2^m u_0) + M(2^n u_0)].$$

Из конечности интегралов, стоящих в правой части неравенства, мы получаем $\frac{1}{2}\int_0^{2\tau(1)} M(\lambda a+\mu b)^{\sim}(\gamma)\,d\gamma < \infty$, а поэтому из теоремы I.5.5 следует $M(\lambda a+\mu b) \in L_1(A)$.

Следовательно, $L_M(A)$ - линейное пространство.

Предложение доказано.

В дальнейшем будем рассматривать $L_M(A)$, порожденное функцией Орлича $M(u)$, удовлетворяющей (Δ_2) - условию.

Для каждого $a \in L_M(A)$ положим

$$\gamma(a) = \gamma(\tilde{a}) = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_0^{\tau(1)} M\left(\frac{\tilde{a}}{\lambda}\right) d\mu \le 1\right\}.$$

Так как $\int_0^{\infty} \tilde{a}(\alpha)\,d\alpha = \int_0^{\infty} \lambda\, d\tau(e_\lambda)$ для $a \in L_1(A)$ (см. [62]), то

$$\gamma(a) = \inf\left\{\lambda > 0 : \tau\left(M\left(\frac{|a|}{\lambda}\right)\right) \le 1\right\}.$$

Если $\gamma(\tilde{a}) = 0$, то $\tilde{a} = 0$, так как $M(u) > 0$ при $u > 0$.

По определению $\gamma(\tilde{a}) < \infty$. Однородность $\gamma(\cdot)$ очевидна. Неравенство треугольника для $\gamma(\cdot)$ легко получается из следующего неравенства

$$\int_0^{\tau(1)} M\left(\frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{\lambda_1+\lambda_2}\right) d\mu \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\int_0^{\tau(1)} M\left(\frac{\tilde{a}}{\lambda_1}\right) d\mu + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\int_0^{\tau(1)} M\left(\frac{\tilde{b}}{\lambda_2}\right) d\mu .$$

Итак, $\gamma(\cdot)$ - норма на $L_M([0,\tau(1)],\mu)$.

Покажем теперь, что из $0 \leq \tilde{a}_n(\alpha) \uparrow \tilde{a}(\alpha) \in L_M([0,\tau(1)],\mu)$ следует $\gamma(\tilde{a}_n) \longrightarrow \gamma(\tilde{a})$, т.е. $\sup\limits_{n=1}^{\infty} \gamma(\tilde{a}_n) = \gamma(\sup\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n)$.

Отметим сначала следующее свойство $\gamma(\cdot)$: для любого $\tilde{a}(\alpha) \neq 0$ имеем

$$\int_0^{\tau(1)} M\left(\frac{\tilde{a}(\alpha)}{\gamma(\tilde{a})}\right) d\mu \leq 1 . \qquad (i)$$

Действительно, возьмем $\lambda_n \longrightarrow \gamma(\tilde{a})$ $(\lambda_n \neq 0)$, причем

$$\int_0^{\tau(1)} M\left(\frac{\tilde{a}(\alpha)}{\lambda_n}\right) d\mu \leq 1 \qquad (ii)$$

Переходя в неравенстве (ii) к пределу, по теореме Фату (см. [22] стр. 305) получаем (i).

Положим $\lim \gamma(\tilde{a}_n) = \lambda$. В силу (i)

$$\int_0^{\tau(1)} M\left(\frac{\tilde{a}_n(\alpha)}{\gamma(\tilde{a}_n)}\right) d\mu \leq 1 \qquad (iii)$$

Переходя в (iii) к пределу, опять - таки в силу теоремы Фату получаем

$$\int_0^{\tau(1)} M\left(\frac{\tilde{a}(\alpha)}{\lambda}\right) d\mu \leq 1 .$$

Отсюда $\gamma(\tilde{a}) \leq \lambda = \lim \gamma(\tilde{a}_n) \leq \gamma(\tilde{a})$ (iv), чем и закончено доказательство равенства $\sup\limits_n \gamma'(\hat{a}_n) = \gamma'(\sup\limits_n \hat{a}_n)$.

Положим $L'_{1M}(A) = \{ b \in \hat{A}, \tau(|ab|) < \infty \}$ для всякого $a \in L_{1M}(A)$

и для $b \in L'_{1M}(A)$ положим

$$\gamma'(b) = \gamma'(\hat{b}) = \sup_{\gamma(g) \le 1} \left\{ \int g \hat{b} \, d\mu , \; g \in L_M([0, \tau(1)], \mu) \right\}$$

Из предложения 2.4 [63] (там оно сформулировано для алгебр фон Неймана, но для случая JBW- алгебр доказательство полностью переносится без всякого изменения) следует, что число

$$\|a\|_M = \sup \{ |\tau(ab)| : \gamma'(b) \le 1 \} .$$

есть норма на $L_{1M}(A)$ и совпадает с $\gamma(a)$.

Следует отметить, что из представления $\|a\|_M$ следует $|\tau(ab)| \le \|a\|_M \gamma'(b)$ для всех $b \in L'_{1M}(A)$.

Поэтому $\|ab\|_1 = \tau(|ab|) = \tau((ab)s) = \tau(a(bs)) \le \|a\|_M \gamma'(bs)$

где s - симметрия из полярного разложения ab.

Покажем теперь, что в $(L_{1M}(A), \|\cdot\|_M)$ выполнено условие (B) (см. § I.I).

П р е д л о ж е н и е I.5.7 В пространстве $(L_{1M}(A), \|\cdot\|_M)$ выполнено условие (B).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{a_n\}_n \subset L_{1M}(A)$, $\theta \le a_n \uparrow$ и $\sup\limits_n \|a_n\|_M < \infty$.

Так как $L_{1M}(A) \subset L_{11}(A)$ и $\|a_n\|_1 \le \|a_n\|_M$, то $\sup \|a_n\|_1 < \infty$. По предложению I.I.6 в $L_{11}(A)$ выполнено условие (B). Поэтому найдется такой элемент $a \in L_{11}(A)$, что $a_n \uparrow a$. Тогда $\{a_n\}_n$ - сходится к a по мере и потому для каждого $b \in L'_{1M}(A)$ последовательность $\{a_n b\}_n$ также сходится к ab по мере.

Так как $a_n \in L_{M}(A)$, то $a_n b \in L_1(A)$. Кроме того при $\gamma'(b) \leq 1$ имеем

$$\|a_n b\|_1 \leq \|a\|_M$$

Поэтому $\sup\limits_n \|a_n b\|_1 \leq \sup\limits_n \|a_n\|_M < \infty$. Значит по лемме Фату (см. § 0) $ab \in L_1(A)$. Ввиду произвольности $b \in L'_M(A)$, получаем $a \in L_M(A)$, т.е. в $L_M(A)$ выполнено условие (B). Предложение доказано.

Т е о р е м а I.5.8 $(L_M(A), \|\cdot\|_M)$ - банахово пространство с порядково непрерывной нормой.

Доказательство полноты следует из предложения I.I.5 и предложения I.5.7.

Покажем что норма $\|\cdot\|_M$ порядково непрерывна.

Пусть $a_n \downarrow \theta$, тогда $\tilde{a}_n(\alpha) \downarrow 0$ и $\int\limits_0^{\tau(1)} M(\varepsilon^{-1}\tilde{a}_n(\alpha))d\alpha \to 0$ при всех $\varepsilon > 0$. Следовательно $\|a_n\|_M \leq \varepsilon$ для $n \geq N(\varepsilon)$, т.е. норма порядково непрерывна. Теорема доказана.

ГЛАВА II

УПОРЯДОЧЕННЫЕ ЙОРДАНОВЫ АЛГЕБРОИДЫ И АБСТРАКТНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НЕАССОЦИАТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА.

Пусть E - векторное пространстве над полем действительных чисел и K - собственный конус в E, который порождает все E (т.е. $E=K-K$). Как известно из теории полуупорядоченных пространств [I5], с помощью K в E определяется частичный порядок $x \le y \Longleftrightarrow y-x\in K$.

Определение 2.I.I. Элемент e из K называется слабой единицей, если для любого ненулевого $a\in K$ существует такое $b\in K$, отличное от нуля, что $b\le a, b\le e$.

Через A обозначим пространство всех ограниченных элементов из E относительно слабой единицы e, т.е. совокупность всех таких $a\in E$, для каждого из которых существует число $\lambda>0$, что $-\lambda e\le a\le \lambda e$.

Определение 2.I.2. Пространство (E,e) называется упорядоченным йордановым алгеброидом (J - алгеброидом), если выполнены следующие условия:

I) на множестве A ограниченных элементов из E можно определить операцию умножения, относительно которой A является йордановой алгеброй с единицей e;

II) $U_a(b)=2a(ab)-a^2b\geqslant\theta$ для любых $a\in A$, $b\in K\cap A$.

III) из $-e\le a\le e$ следует $a^2\le e$.

П р и м е р ы:

I) Частично упорядоченная йорданова алгебра измеримых элементов относительно JBW - алгебры является примером упорядоченного J - алгеброида.

2) Эрмитова часть кольца измеримых операторов $\hat{S}(\mathcal{M})$ присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, также является упорядоченным J - алгеброидом.

Всюду в дальнейшем через $\|\cdot\|_E$ будем обозначать норму на упорядоченном J - алгеброиде.

О п р е д е л е н и е 2.I.3. Конус K называется монотонно замкнутым, если предел любой монотонно сходящейся по норме последовательности из K принадлежит K.

О п р е д е л е н и е 2.I.4. Пара $(E, \|\cdot\|_E)$ называется банаховым упорядоченным J - алгеброидом, если K монотонно замкнут и банахова норма $\|\cdot\|_E$ обладает следующими свойствами:

I) $\|b\|_E \leq \|a\|_E$, если $\theta \leq b \leq a$;

2) $\|ax\|_E \leq \|x\|_E$, если $a, x \in A$ $a^2 \leq e$;

3) $\|U_s x\|_E = \|x\|_E$ если $x \in E$ и $s \in A$, причем $s^2 = e$.

Пространства L_p $(p \in [1, \infty))$ и пространства Орлича, рассмотренные в § I,2, § I,3 и § I.5, также являются примерами банаховых упорядоченных J - алгеброидов.

Л е м м а 2.I.5. Пусть E банахов упорядоченный J - алгеброид $\{x_n\} \subset E$, $x \in E$ и $\|x_n - x\|_E \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$, причем $\{x_n\}$ возрастает (соответственно убывает). Тогда $x = \sup x_n$ (соответственно $x = \inf x_n$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\{x_n\}$ возрастает, то $x_k - x_n \geqslant \theta$ для всех $k \geqslant n$, и последовательность $\{x_k - x_n\}$ возрастает при $k \longrightarrow \infty$ и фиксированном n . Из монотонной замкнутости K следует, что $(x - x_n) \in K$ т.е. $x \geqslant x_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Если $z \in E$ и $z \geqslant x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\{z - x_n\}$ убывающая последовательность из K и поэтому, в силу монотонной замкнутости K , $(z - x) \in K$, т.е. $z \geqslant x$.

Это означает, что $x = \sup x_n$. Если $\{x_n\}$ - убывающая последовательность, то $\{-x_n\}$ возрастает и $-x = \sup\limits_{n \geqslant 1} (-x_n)$, т.е. $x = \inf\limits_{n \geqslant 1} x_n$. Лемма доказана.

Л е м м а 2.I.6. Пусть (E, e) банахов упорядоченный J - алгеброид, A - йорданова алгебра ограниченных относительно e элементов. Если $a \in A$ и $a^2 = \theta$, то $a = \theta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что: если $-\frac{1}{n} e \leq a \leq \frac{1}{n} e$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, то $a = \theta$. В самом деле, в силу свойства I) нормы , неравенство $\theta \leq a + \frac{1}{n} e \leq \frac{2}{n} e$ влечет $(a + \frac{1}{n} e) \longrightarrow \theta$ при $n \longrightarrow \infty$ и потому $a = \theta$. Имеем

$$\theta \leq (a + \frac{1}{n} e)(a + \frac{1}{n} e) = a^2 + \frac{1}{n}(2a) + \frac{1}{n^2} e = \frac{1}{n}(2a) + \frac{1}{n^2} e .$$

Следовательно, $2a \geqslant -\frac{1}{n}e$. Аналогично $2a \leq \frac{1}{n}e$, т.е. $-\frac{1}{n}e \leq 2a \leq \frac{1}{n}e$ и поэтому $2a = \theta$. Отсюда $a = \theta$

Лемма доказана.

Т е о р е м а 2.I.7. Пусть (E, e) банахов упорядоченный J - алгеброид и A - йорданова алгебра ограниченных относительно e элементов. Тогда на A существует норма, относительно которой A является JB - алгеброй (йордановой банаховой алгеброй).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого $x \in A$ положим

$$\|x\|_\infty = \inf\{\lambda > 0;\ -\lambda e \leq x \leq \lambda e\}.$$

Ясно, что $0 \leq \|x\|_\infty < \infty$ для всех $x \in A$ и $\|e\|_\infty = 1$.

Если $\|x\|_\infty = 0$, то $-\frac{1}{n}e \leq x \leq \frac{1}{n}e$, $n = 1, 2, \ldots$, и поэтому $x = \theta$ (см. лемму 2.I.6). Непосредственно из определения $\|\cdot\|_\infty$ вытекает, что $\|\alpha x\|_\infty = |\alpha|\,\|x\|_\infty$ и

$\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ для всех $x, y \in A$ и действительных чисел α, т.е. $(A, \|\cdot\|_\infty)$ нормированное пространство над полем действительных чисел. Заметим также, что из монотонной замкнутости конуса K следует

$$-\|x\|_\infty e \leq x \leq \|x\|_\infty e \quad \text{для всех } x \in A.$$

Далее, если $y = \dfrac{x}{\|x\|_\infty}$, то $\theta \leq y^2 = \dfrac{x^2}{\|x\|_\infty^2} \leq e$ и поэтому

$\left\| \dfrac{x}{\|x\|_\infty} \right\|_E \leq \|e\|_E$, т.е. $\|x\|_E \leq \|x\|_\infty \|e\|_E$, где

$\|x\|_E$ - исходная норма в банаховом упорядоченном J - алгеброиде (E, e).

Покажем теперь, что $(A, \|\cdot\|_\infty)$ - банахово пространство. Пусть $\{x_n\} \subset A$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_\infty < \infty$.

Положим

$a_n = x_n + \|x_n\|_\infty e$, $b_n = \|x_n\|_\infty e - x_n$; тогда $a_n \geq \theta$

$b_n \geq \theta$, $x_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$, $\|a_n\|_\infty \leq 2\|x_n\|_\infty$, $\|b_n\|_\infty \leq$

$\leq 2\|x_n\|_\infty$. Так как

$$\left\|\sum_{n=m}^{k} a_n\right\|_E \leq \sum_{n=m}^{k} \|a_n\|_\infty \|e\|_E \leq 2\|e\|_E \sum_{n=m}^{k} \|x_n\|_\infty ,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится в банаховом пространстве $(E, \|\cdot\|_E)$. Пусть $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, тогда в силу монотонной замкнутости конуса K; $\theta \leq a \leq 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_\infty\right) e$, т.е. $a \in A \cap K$.

Аналогично ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится в $(E, \|\cdot\|_E)$ и $b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \in A \cap K$. Ясно, что $\|a - \sum_{n=1}^{m} a_n\|_\infty \to 0$ и $\|b - \sum_{n=1}^{m} b_n\|_\infty \to 0$ при $m \to \infty$. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится в $(A, \|\cdot\|_\infty)$ к элементу $\frac{1}{2}(a - b)$.

Следовательно, нормированное пространство $(A, \|\cdot\|_\infty)$ является полным.

Так как

$$\{x\in A\cap K : \|x\|_\infty \le 1\} = \{x\in A : \|x\|_\infty \le 1, \|e-x\|_\infty \le 1\},$$

то выпуклое подмножество $K\cap A$ замкнуто в $(A, \|\cdot\|_\infty)$.

На основании вышесказанного $(A, \|\cdot\|_\infty)$ - полное упорядоченное нормированное пространство с единицей e и с заданным в нем йордановым умножением элементов. Тогда по теореме 2.I из [37] следует, что A является JB - алгеброй. Теорема доказана.

Замечание 2.I.8. Для любых $a, b\in A$ выполняется следующее неравенство: $\|ab\|_E \le \|a\|_\infty \|b\|_E$.

Действительно: $\theta \le \dfrac{a^2}{\|a\|_\infty^2} = \dfrac{a^2}{\|a\|_\infty^2} \le e$, поэтому в силу свойства 2) из определения 2.I.4

$$\left\| \frac{a}{\|a\|_\infty} b \right\|_E \le \|b\|_E, \text{ т.е. } \|b\|_E \le \|a\|_\infty \|b\|_E.$$

В частности, на JB - алгебре A ограниченных относительно e элементов операция умножения раздельно непрерывна по норме $\|\cdot\|_E$.

§ 2.2. Монотонно полные йордановы алгеброиды.

Определение 2.2.I. Упорядоченный J - алгеброид (E, e) называется монотонно полным, если для любой возрастающей и ограниченной сверху сети $\{x_\alpha\}_\alpha$ элементов из (E, e) в E существует точная верхняя грань.

Говорят, что норма $\|\cdot\|_E$ в банаховом упорядоченном J - алгеброиде $(E, \|\cdot\|_E)$ порядково непрерывна, если из $a_\alpha \downarrow \theta$, $a_\alpha \in K$ следует $\|a_\alpha\|_E \longrightarrow 0$.

Л е м м а 2.2.2. Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ банахов упорядоченный монотонно полный J - алгеброид с порядково непрерывной нормой $\|\cdot\|_E$. Тогда JB - алгебра A ограниченных относительно e элементов из E плотна в E .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что если $\{x_\alpha\}$ монотонно возрастающая и ограниченная сверху элементом $z \in A$ сеть элементов из A , то по условию монотонной полноты в E существует $x = \sup\limits_\alpha x_\alpha$.Так как $x_\alpha \leq x \leq z \in A$, то $x \in A$. Если $y \in A$ и $y \longleftrightarrow x_\alpha$ для всякого α , то из порядковой непрерывности нормы $\|\cdot\|_E$, и замечания 2.I.8 следует, что $x \longleftrightarrow y$, т.к. в силу [39] понятие совместности в JB - алгебрах совпадает с понятием операторной коммутируемости. Из этого и [37] следует, что JB - алгебра A превращается в частично упорядоченную йорданову алгебру ограниченных элементов, т.е. OJB - алгебру (см. § 0).

Покажем, что для всякого ненулевого $x \in E$ существует такая возрастающая сеть $\{z_\alpha\} \subset K \cap A$, что $\|x - z_\alpha\|_E \longrightarrow 0$. Обозначим через $\mathcal{P}$ семейство всевозможных наборов $\{y_i\}_{i \in I}$ из $K \cap A$, обладающих следующим свойством $\sum\limits_{i \leq \alpha} y_i \leq x$ для любого $\alpha = (i_1, \ldots, i_n) \subset I$.

Так как e — слабая единица, то семейство $\mathcal{P}$ не пусто. Пусть $\mathcal{A}=\{y_i\}_{i\in J}$ максимальный набор в $\mathcal{P}$. Положим $z_\alpha=\sum_{i\in\alpha} y_i$ для $\alpha=(i_1,\ldots,i_n)\subset J$. Сеть $\{z_\alpha\}$ возрастает, $z_\alpha\in K\cap A$ и $z_\alpha\le x$ для всех α. Если сеть $\{z_\alpha\}$ не фундаментальна в E, то найдутся $\varepsilon>0$ и такая последовательность индексов $\alpha_1\le\beta_1\le\alpha_2\le\beta_2\le,\ldots,$ что $\|z_{\beta_n}-z_{\alpha_n}\|_E\geqslant\varepsilon$. $n=1,2,\ldots$. В силу монотонной полноты E и порядковой непрерывности нормы последовательность $\{z_{\alpha_1}, z_{\beta_1}, z_{\alpha_2}, z_{\beta_2},\ldots\}$ сходится, что противоречит выбору этой последовательности. Следовательно, сеть $\{z_\alpha\}$ фундаментальна в E и потому найдется такое $z\in E$, что $\|z_\alpha-z\|_E\to 0$. Выберем последовательность индексов $\alpha_1\le\alpha_2\le\cdots$ так, чтобы $\|z_{\alpha_n}-z\|_E\to 0$ при $n\to\infty$. Тогда по лемме 2.I.5 получим, что $z=\sup z_{\alpha_n}$. Для произвольного z_α строим последовательность $\{z_{\alpha'_n}\}$ так, чтобы $\alpha'_1=\alpha$, $\alpha'_n\geqslant\alpha'_{n-1}, \alpha'_n\geqslant\alpha_n$ и $\|z_{\alpha'_n}-z\|_E\longrightarrow 0$, при $n\longrightarrow\infty$. Тогда $z=\sup\limits_{n\geqslant 1} z_{\alpha'_n}$ и потому $z_\alpha=z$ для всех α. Следовательно $z=\sup z_\alpha\le x$. Если $x-z\ne 0$, то найдется такой ненулевой элемент $z_0\in K$, что $z_0\le x-z$, $z_0\le e$. Тогда

$\mathcal{A} \cup \{z_0\} \in \mathcal{P}$, что противоречит максимальности набора $\mathcal{A}$. Таким образом, $z = x$, в частности, $\|z_\alpha - x\|_E \longrightarrow 0$. Следовательно, $K \subset \overline{K \cap A}$. Так как $K - K = E$, то $E = \overline{A}$. Лемма доказана.

Замечание 2.2.3. При доказательстве леммы 2.2.2 установленно, что для любого $x \in K$ существует такая возрастающая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K \cap A$, что

$x = \sup\limits_n x_n$.

Предложение 2.2.4. Если $(E, \|\cdot\|_E)$ банахов упорядоченный монотонно полный J - алгеброид с порядково непрерывной нормой, то JB - алгебра A ограниченных относительно e элементов из E является модулярной JBW - алгеброй счетного типа.

Доказательство. Из леммы 2.2.2 следует, что A - OJB - алгебра. Покажем, что OJB - алгебра A конечна, т.е. в ней существует не более конечного числа попарно ортогональных, попарно эквивалентных идемпотентов ([10] стр. 56). Если это не так, то в A найдется бесконечная последовательность $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ попарно эквивалентных и попарно ортогональных ненулевых идемпотентов. Пусть $\{s_k\}_{k=1}^{m}$ такие симметрии из A, что $e_1 = U_{s_m} \dots U_{s_2} U_{s_1} e_i$ (существование $\{s_k\}_{k=1}^{m}$ следует из определения эквивалентности идемпотентов (см. § 0). Из свойств нормы в E следует

$$\|e_1\|_E = \|U_{s_m} \dots U_{s_2} U_{s_1} e_i\|_E = \|e_i\|_E \ .$$

Так как $e_i \le f_i = \sup\limits_{j \ge i} e_j$ и $f_i \downarrow \theta$ (см. [10] теорема 5,3), то $\|e_i\|_E \longrightarrow 0$.Поэтому $\|e_1\|_E = 0$,что невозможно. Из полученного противоречия следует, что A -конечна. Тогда по лемме 5.4 из [10] мы имеем, что A модулярная OJB - алгебра. Через A_0 обозначим максимальную сильно ассоциативную JB - подалгебру в A . Из [37] следует,что A_0 - векторная решетка. Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ врзрастающая последовательность из A_0 и $\theta \le x_n \le y, y \in A_0$, то существует такое $x \in K$,что $x_n \uparrow x$ при этом $x \le y$, т.е. $x \in A$. Так как $(x - x_n) \downarrow \theta$,то $\|x - x_n\|_E \to 0$ при $n \longrightarrow \infty$. Из замечания 2.1.8 следует, что $x \longleftrightarrow z$ для любого $z \in A_0$. Так как A_0 максимальная JB - подалгебра в A , то по теореме 1.2 из [10] $x \in A_0 \cap K$. Следовательно A_0 является условно σ - полной векторной решеткой и из [15] гл. 7, § 6 следует, что A_0 имеет счетный тип. Из этого следует, что OJB - алгебра A счетного типа.

Нам остается показать, что на A существует разделяющее семейство нормальных состояний.

Пусть $x \in A$ и $x \ne \theta$, тогда $x^2 \ne \theta$ и поэтому $(-x^2) \notin K$.

По теореме Хана - Банаха существует такой непрерывный линейный функционал φ на $(A, \|\cdot\|_\infty)$,что $\varphi(-x^2) < 0$ и $\varphi(y) \geqslant 0$ для всех $y \in K \cap A$. Тогда φ положительный линейный функционал на OJB -алгебре A , причем

$\varphi(x^2) > 0$, в частности, $\varphi(e) > 0$ (последнее неравенство следует из соотношений: $0 < [\varphi(x^2)]^2 \leq \leq \varphi(e)\varphi(x^2 \; x^2)$. Можно считать, что $\varphi(e) = 1$, т.е. φ является состоянием на A . Обозначим через N множество всех таких состояний φ на A , для которых $\varphi(y) \geq 0$ при $y \in K \cap A$. Так как A модулярная OJB - алгебра, то по лемме 5.5 из [10] на ∇ существует центрозначная функция размерности (здесь ∇ обозначена логика всех идемпотентов из A). Центр Z OJB- алгебры A является полуполем, у которого идемпотенты образуют топологическую булеву алгебру. Следовательно, в Z существует d - топология (§ 6). Повторяя доказательство пункта I предложения I.I.2, получим, что топология порожденная исходной нормой на A , сильнее d - топологии на A . Так как $K \cap A$ замкнуто в A относительно d - топологии (см.[10] следствие 6.2 стр. 64), то $K \cap A$ замкнуто в A и относительно исходной нормированной топологии. Поэтому множество N является разделяющим семейством состояний на A , непрерывных в исходной топологии, а следовательно каждое состояние из N является нормальным. Теорема доказана.

§ 2.3 Абстрактная характеризация неассоциативных L_p - пространств .

Пусть A - модулярная JBW - алгебра, $\mathbb{1}$ единица в A , τ точный нормальный конечный след на A и $L_p(A)$ - банахово пространство всех интегрируемых с p -ой степенью модуля по τ измеримых элементов [2] , где $1 \leq p < \infty$.

Пространство $L_p(A)$, очевидно, является банаховым упорядоченным J - алгеброидом относительно естественного частичного порядка и слабой единицы $\mathbb{1}$. Множество ограниченных элементов в $L_p(A)$ совпадает с A и норма $\|\cdot\|_p$ обладает следующим свойством p - аддитивности:

$$\|a+b\|_p^p = \|a\|_p^p + \|b\|_p^p \quad \text{для любых } a, b \in A,$$

$a \geqslant \theta$, $b \geqslant \theta$, $a \cdot b = \theta$, $p \in [1, +\infty)$ (см. [33], [47]).

Отметим также, что норма $\|\cdot\|_p$ порядково непрерывна и монотонно полна (см. [4]) и A плотно в $L_p(A)$.

Будем говорить, что банаховы упорядоченные J - алгеброиды (E, e) и (F, f) изометрически и порядково изоморфны, если существует такая изометрия $V: E \longrightarrow F$, что $V(e) = f$, $V(x) \geqslant \theta$ тогда и только тогда, когда $x \geqslant \theta$.

Сформулируем основную теорему этого параграфа.

Т е о р е м а 2.3.1. Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ - банахов упорядоченный монотонно полный J - алгеброид, норма которого обладает свойством p - аддитивности $(p \in [1, +\infty))$. Тогда существует модулярная JBW - алгебра A счетного типа и точный нормальный конечный след τ на A, такие, что E изометрически и порядково изоморфно $L_p(A)$.

Перед доказательством теоремы 2.3.1 приведем несколько вспомогательных результатов, которые будут использованы в дальнейшем.

П р е д л о ж е н и е 2.3.2. Пусть (X, m) - пространство с мерой и $m(X) = 1$. Если φ - непрерывный положительный линейный функционал на $L^p(X, m)$, $p \in [1, +\infty)$ и $\|\varphi\| = \varphi(\mathbb{1})$, то

$$\varphi(f)=\int_X f(x)\,dm(x), \quad f\in L^p(X,m).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\varphi\in(L^p)^*$, то по теореме Рисса [22] функционал φ можно представить в следующем виде: $\varphi(f)=\int_X f(x)g(x)\,dm(x)$,

где $g(x)\in L^q(X,m)\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1\right)$, причем $\|g\|_q=\|\varphi\|=1$.

Тогда по условию предложения $\varphi(1)=\int_X 1\cdot g(x)\,dm(x)=1$.

Из последнего равенства и неравенства Гёльдера:

$$\left|\int_X 1\cdot g(x)\,dm(x)\right|\le\left(\int_X 1^p\,dm(x)\right)^{1/p}\left(\int_X|g(x)|^q\,dm(x)\right)^{1/q}=$$

$$=1\cdot\|g\|_q=1$$

следует, что $1=\int_X g(x)\,dm(x)=\left(\int_X|g(x)|^q\,dm\right)^{1/q}$, т.е.

в неравенстве Гёльдера имеет место равенство. По свойствам интегрируемых функций полученное равенство имеет место, когда подинтегральные функции пропорциональны, т.е. $|g(x)|=C\cdot 1$, где C – постоянная. Проинтегрировав по всему X обе части последнего равенства, получим $C=1$, а поэтому $g(x)\equiv 1$, т.е.

$$\varphi(f)=\int_X f(x)g(x)\,dm(x)=\int_X f(x)\,dm(x).$$

Предложение доказано.

Т е о р е м а 2.3.3. Пусть (E, e) - упорядоченный монотонно полный J - алгеброид с нормой $\|\cdot\|_E$, обладающей свойством p - аддитивности и $\|e\|_E = 1$. Тогда существует единственный положительный линейный функционал τ на OJB -алгебре A такой, что $\tau(e) = 1$ и $\|x\|_E^p = = \int_0^\infty |\lambda|^p d\tau(e_\lambda)$ для всякого $x \in A$, где $\int_{-\infty}^\infty \lambda d e_\lambda$ - спектральное разложение x.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим подпространство B из A, которое определяется следующим образом

$B = \{\lambda \cdot e$, где λ - скаляр $\}$. Положим $\tau_0(\lambda e) = \lambda$. Очевидно, что τ_0 - линейный функционал на B и $\|\tau_0\| = 1$. Тогда по теореме Хана - Банаха существует линейный функционал τ, заданный на A, такой, что $\|\tau\| = 1$ и $\tau(x) = \tau_0(x)$ для любого x из B. Исследуем теперь свойства функционала τ на некоторой, произвольно взятой максимальной ассоциативной подалгебре A_0 из A. По теореме Хана-Банаха

$|\tau(x)| \leq \|x\|_E$, т.е. $\|\tau \setminus A_0\| \leq 1$. В силу того, что $e \in A_0$ и $\tau(e) = \tau_0(e) = 1$, получаем $\|\tau \setminus A_0\| = 1$.

Далее, так как A_0 нормированная решетка с p - аддитивной нормой, то по теореме 2 ([47], § 3) ее замыкание $\bar{A}_0$ по норме $\|\cdot\|_E$ является банаховой решеткой с p - аддитивной нормой в E. Следовательно $\bar{A}_0$ - абстрактное L_p - пространство в смысле определения I ([47], § I5). Тогда по теореме 3 из ([47] § I5) существует Хаусдорфово пространство X и регулярная борелевская мера m, такие, что $\bar{A}_0$ изометрически изоморфно $L_p(X . m)$.

Пусть φ изоморфизм между $\bar{A}_0$ и $L_p(X, m)$.

Тогда для любого a из A_0 имеем

$$\|a\|_E^p = \int_0^\infty |\lambda|^p \, dm(\varphi(e_\lambda))$$

(здесь $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, de_\lambda$ - спектральное разложение a).

Так как $\|\tau|_{A_0}\| = \tau(e) = 1$, то в силу предложения 2.3.2 получаем:

$$\tau(a) = \int_X \varphi(a)(x) \, dm(x),$$

в частности $\tau(q) = m(\varphi(q))$ для любого идемпотента q из A_0 . Отсюда следует, что

$$\|a\|_E^p = \int_0^\infty |\lambda|^p \, d\tau(e_\lambda) .$$

Теорема доказана.

Отметим важное следствие, вытекающее из теоремы 2.3.3.

С л е д с т в и е 2.3.4. Пусть выполнены условия теоремы 2.3.3 и норма $\|\cdot\|_E$ обладает следующим свойством: $\|U_S a\|_E = \|a\|_E$ для всякого a и любой симметрии S из A . Тогда τ - след.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 2.3.3 существует положительный линейный функционал τ такой, что для любого a из A имеет место равенство:

$$\|a\|_E^p = \int_0^\infty |\lambda|^p \, d\tau(e_\lambda)$$

(здесь $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, de_\lambda$ - спектральное разложение a).

Для любого идемпотента $g \in A$ очевидно, что $\|g\|_E^p = \tau(g)$.

Следовательно $\tau(g) = \|g\|_E^p = \|U_s g\|_E^p = \tau(U_s g)$.

В силу спектральной теоремы (см. § 0) $\tau(a) = \tau(U_s a)$ для всех $a \in A$, т.е. τ - след. Следствие доказано.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, $x_n \downarrow \theta$ и $\varepsilon > 0$ (здесь A OJB - алгебра). Говорят, что идемпотент q является ε - идемпотентом для последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если существует n_0 такое, что для всех $n \geqslant n_0$ имеет место неравенство:

$$U_q x_n \leq \varepsilon q.$$

Предложение 2.3.5. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из OJB - алгебры A и $x_n \downarrow \theta$. Для любого идемпотента $g \neq \theta$ из A существует идемпотент $q \neq \theta$ такой, что $q \leq g$ и q является ε - идемпотентом для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Не нарушая общности наших рассуждений, мы можем считать, что $g = e$.

Рассмотрим спектральный идемпотент $e_n = \{x_n \leq \varepsilon\} = \left\{\int_{-\infty}^{\varepsilon} de_\lambda^{(n)}\right\}$, где $\left\{e_\lambda^{(n)}\right\}$ - спектральное семейство элемента x_n.

Если $e_n \neq \theta$ для некоторого n, то $U_{e_n} x_n \leq \varepsilon e_n$ и тогда e_n является ε - идемпотентом.

Предположим, что $e_n = \theta$ для всех n. Тогда

$$e_n^{\perp} = \{x_n < \varepsilon\} = e \text{ и } x_n \geqslant \varepsilon e \quad \text{для любого } n,$$

а поэтому $\inf x_n \geqslant \varepsilon e$, что противоречит условию предложения $x_n \downarrow \theta$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения.

В следующем предложении обобщается результат, полученный в [9].

П р е д л о ж е н и е 2.3.6. Пусть τ - след на OJB - алгебре A, тогда имеет место следующее равенство

$$\tau(x) = \sum_{k=1}^{n} \tau(U_{e_k} x) \quad \text{для всякого набора идемпотентов}$$

$$\{e_k\}_{k=1}^{n} \subset A,\ e_i \perp e_j \text{ и } \sum_{k=1}^{n} e_k = e.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В [9] показано, что если τ - - след на OJB - алгебре A, то имеет место равенство:

$$\tau(x) = \tau(U_g(x)) + \tau(U_{e-g} x) \quad \text{для всякого } x \text{ и}$$

любого идемпотента g из A. С использованием этого результата, доказательство предложения 2.3.6 проводится по индукции.

Т е о р е м а 2.3.7. Пусть τ - точный, σ - аддитивный линейный функционал, на OJB - алгебре ограниченных элементов A из банахово упорядоченного монотонно полного J - алгеброида E. Если τ - след, то он нормален (ср. [55], стр. 95).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из A, которая убывает к θ. Очевидно можно считать, что $\|x_n\|_\infty \leq 1$ для любого n.

Из предложения 2.3.5 следует, что для всякой последовательности элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из A монотонно убывающей к θ существует семейство попарно ортогональных идемпотентов $\{e_i\}_i \subset A$, причем каждый элемент из $\{e_i\}_i$ является ε - идемпотентом для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\sup\limits_i e_i = e$.

Так как τ - точный функционал и $\sum\limits_i \tau(e_i) = \tau(e)$, то по предложению 4 из [3I] (стр. 36) следует, что $\{e_i\}_i$ - счетное семейство. Не ограничивая общности наших рассуждений будем предполагать, что τ - вероятностный след, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \tau(e_i) = 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n, что выполняется следующее неравенство:

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \tau(e_i) < \varepsilon .$$

По предложению I.3.6 мы имеем:

$$(*)\ \tau(x_m) = \tau(U_{e_1} x_m) + \tau(U_{e_2} x_m) + \cdots + \tau(U_{e_n} x_m) + \\ + \tau(U_{f_n} x_m), \quad \text{где } f_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} e_k .$$

Так как e_i ε - идемпотент, то существует номер m_i такой, что $U_{e_i} x_m \leq \varepsilon e_i$ при $m \geqslant m_i$.

Тогда для $m \geqslant \max m_i$ мы можем оценить правую часть $(*)$, а именно

$$\tau(U_{e_1} x_m) + \tau(U_{e_2} x_m) + \cdots + \tau(U_{e_n} x_m) \leq \varepsilon \tau(e_1) +$$

$$+\varepsilon\tau(e_2)+\cdots+\varepsilon\tau(e_n)\le\varepsilon\tau(e)=\varepsilon .$$

Оценим теперь последний член правой части в (*):

$$\tau(U_{f_n}x_m)\le\|x_m\|_\infty\tau(f_n)\le\tau(f_n)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\tau(e_k)<\varepsilon .$$

Из полученных нами неравенств следует, что $\tau(x_m)<2\varepsilon$, т.е. τ - нормален. Теорема доказана.

Отметим важное следствие теорем 2.3.3 и 2.3.7.

Следствие 2.3.8. Пусть на логике идемпотентов OJB - алгебры A задана σ - аддитивная строго положительная мера μ (см. [31] стр. 31 и ср. [43, 64]).

Предположим, что величина $\|x\|=\int_{-\infty}^{\infty}|\lambda|\,d\mu(e_\lambda)$ обладает свойством

$$\|x_1+x_2\|\le\|x_1\|+\|x_2\| ,\quad x_1, x_2\in A .$$

Тогда мера μ однозначно продолжается до нормального линейного положительного функционала на алгебре A .

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений, предположим, что $\|e\|=1$. Тогда по теореме 2.3.3 существует единственный положительный линейный функционал τ на A такой, что $\tau(e)=1$ и $\|x\|=\int_{-\infty}^{\infty}|\lambda|\,d\lambda(e_\lambda)$ для всякого $x\in A$, где $\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,de_\lambda$ - спектральное разложение x .

Для любого идемпотента g A очевидно, $\|g\|=\tau(g)=\mu(g)$, т.е. $\tau|_\nabla=\mu$. Нормальность τ вытекает из σ -аддитивности μ . Следствие доказано.

Перейдем к доказательству теоремы 2.3.1.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, мы можем положить $\|e\|_E = 1$. Тогда из следствия 2.3.4 вытекает существование следа τ на A . Из теоремы 2.3.3 следует равенство $\tau(g) = \|g\|_E^p$ для любого идемпотента g из A , и если $g_n \uparrow g \, (g_n, g \in \nabla)$, то $\|g_n - g\|_E \longrightarrow 0$ и поэтому $\tau(g) = \sup\limits_{n \geq 1} \tau(g_n)$, т.е. τ - есть σ - аддитивный, на логике идемпотентов ∇ из A , точный след.

Следовательно, по теореме 2.3.7 τ - точный нормальный конечный след на OJB - алгебре A . Для любого $a \in A$ определим линейный функционал ρ_a на A как $\rho_a(b) = \tau(ab)$, $b \in A$. По лемме 2.2.2 [56] ρ_a - является нормальным функционалом на A . Множество таких нормальных функционалов обозначим через N . Тогда по теореме 0.10 из § 0 следует, что A - JBW - алгебра.

Проводя аналогичные рассуждения как и в предложении 2.2.4 мы получаем, что A - модулярная JBW - алгебра.

Через A_0 обозначим максимальную сильно ассоциативную JBW - подалгебру в A . Из условия ρ -аддитивности нормы $\|\cdot\|_E$ вытекает, что A_0 имеет счетный тип и поэтому A JBW - алгебра счетного типа.

Покажем теперь, что E - изометрически и порядково изоморфно $L_p(A, \tau)$. Пусть x простой элемент из A .

т.е. имеет вид $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i$, где $\{g_i\}$ попарно ортогональные идемпотенты из A , λ_i - действительные числа $i=1,2,\dots,n$. Тогда $\|x\|_E^p=$

$$=\sum_{i=1}^{n}\|\lambda_i g_i\|_E^p=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^p\tau(g_i)=\|x\|_p^p, \text{ т.е. } \|x\|_E=\|x\|_p.$$

Если x элемент из A , то существует такая последовательность простых элементов $\{x_n\}\subset A$, что $\|x-x_n\|_\infty\longrightarrow\infty$ при $n\longrightarrow\infty$. Так как $\|x-x_n\|_E\leq\|x-x_n\|_\infty\|e\|_E$, то $\|x-x_n\|_E\longrightarrow 0$. Аналогично $\|x-x_n\|_p\longrightarrow 0$ при $n\longrightarrow\infty$. Следовательно: $\|x\|_E=\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_E=$ $\lim\|x_n\|_p=\|x\|_p$. Используя замечание 2.I.8 и полярное разложение элементов из A (см. § 0), получим, что $\|x\|_E=\||x|\|_E=$ $\||x|\|_p=\|x\|_p$ для всех $x\in A$. Покажем, что A плотно в $(E,\|\cdot\|_E)$. Пусть x положительный элемент из E . Рассмотрим семейство $\mathcal{P}$ всевозможных наборов $\{y_i\}_{i\in I}$ из $K\cap A$ обладающих следующим свойством: $\sum_{i\in\alpha}y_i\leq x$ для любого $\alpha=(i_1,\dots,i_n)\subset I$.

Обозначим через $\mathcal{A}=\{y_j\}_{j\in J}$ максимальный набор в $\mathcal{P}$. Положим $z_\alpha=\sum_{j\in\alpha}y_j$ для $\alpha=(j_1,\dots,j_n)\subset J$.

Сеть $\{z_\alpha\}$ возрастает, $z_\alpha\in K\cap A$, $z_\alpha\leq x$ для всех α в частности $\sup\limits_{\alpha} \| z_\alpha \|_p \le \| x \|_E < \infty$.

В силу порядковой непрерывности и монотонной полноты нормы $\| \cdot \|_p$ существует такое $a \in L_p(A)$, что $z_\alpha \uparrow a$ и $\| z_\alpha - a \|_p \longrightarrow 0$.

Следовательно, сеть $\{ z_\alpha \}$ фундаментальна в $(E, \| \cdot \|_E)$ и поэтому найдется такое $z \in E$, что $\| z_\alpha - z \|_E \longrightarrow 0$.

Используя теперь лемму 2.I.5, получим, что $z = \sup\limits_{\alpha} z_\alpha$. Если $x - z \neq \theta$, то найдется такой ненулевой элемент $z_0 \in K$, что $z_0 \le x - z$, $z_0 \le e$. Тогда $\mathcal{A} \cup \{ z_0 \} \in \mathcal{P}$, что противоречит максимальности набора $\mathcal{A}$. Таким образом $z = x$ и поэтому $K \cap \mathcal{A}$ плотно в K. Так как $K - K = E$, то A плотно в $(E, \| \cdot \|_E)$. Следовательно тождественное отображение из $(A, \| \cdot \|_E)$ на $(A, \| \cdot \|_p)$ продолжается до изометрии из $(E, \| \cdot \|_E)$ на $(L_p(A), \| \cdot \|_p)$, которая, очевидно, и будет изометрическим и порядковым изоморфизмом $(E, \| \cdot \|_E)$ на $L_p(A, \tau)$. Теорема доказана.

§ 2.4 Абстрактная характеризация неассоциативных пространств Орлича.

Пусть как и в § 2.3 (E, e) - упорядоченный J - алгеброид, A - JB - алгебра ограниченных элементов из E.

О п р е д е л е н и е 2.4.I. Неотрицательная функция Φ на E называется модуляром Орлича (ср. [40]), если:

I) $\Phi(x)=0$ лишь при $x=\theta$;

2) $\Phi(x)\leq\Phi(y)$, если $\theta\leq x\leq y$, x и y из E ;

3) $\Phi(ax)\leq\Phi(y)$; если $a, x\in A$ и $\|a\|_\infty\leq 1$;

4) $\psi_x(t)=\Phi(tx)$ - выпуклая функция по t на $[0,+\infty)$ для всех $x\in E$ и $\Phi(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq 1$, если

$\Phi(x)\leq 1$, $\Phi(y)\leq 1$; $\alpha\in[0,1]$;

5) $\Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y)$ для $x.y\in A$, $xy=\theta$,

$x\geqslant\theta$, $y\geqslant\theta$.

6) $\Phi(2x)\leq C\Phi(x)$ для всех $x\in E$ и некоторой константы $C>0$.

Если $(L_M(A), \|\cdot\|_M)$ — неассоциативное пространство Орлича, то $\Phi(x)=\|M(|x|)\|_1$ является модуляром Орлича на $L_M(A)$.

Для каждого элемента a из E рассмотрим число

$$\|a\|_\Phi=\inf\{\lambda>0:\Phi(\tfrac{a}{\lambda})\leq 1\} .$$

Нетрудно показать, что $\|\cdot\|_\Phi$ есть норма на E , которая удовлетворяет условиям I и 2 из определения 2.4.I.

Если норма $\|\cdot\|_\Phi$ банахова и конус K монотонно замкнут, то банахов упорядоченный J - алгеброид $(E, \|\cdot\|_\Phi)$ назовем J - алгеброидом Орлича (ср. [40]).

Пусть $(E, \|\cdot\|_\Phi)$ - J - алгеброид Орлича. Для каждого x из $(E, \|\cdot\|_\Phi)$ положим $\varphi_x(\alpha) = \dfrac{\Phi(\alpha x)}{\Phi(x)}$, $\alpha \geqslant 0$.

Определение 2.4.2. J - алгеброид Орлича $(E, \|\cdot\|_\Phi)$ называется идемпотентно-инвариантным относительно Φ, если $\varphi_g = \varphi_e$ для любого идемпотента $g \in A$, где e - слабая единица.

Ясно, что каждое неассоциативное пространство Орлича $(L_M(A), \|\cdot\|_M)$ является J - алгеброидом Орлича, идемпотентно- инвариантным относительно модуляра $\Phi(a) = \|M(|a|)\|_1$.

Теорема 2.4.3. Пусть $(E, \|\cdot\|_\Phi)$ - монотонно полный J - алгеброид Орлича, идемпотентно-инвариантный относительно модуляра Φ. Тогда существует модулярная JBW - алгебра A и точный нормальный конечный след τ на A такие, что $(E, \|\cdot\|_\Phi)$ изометрически и порядково изоморфно пространству $(L_M(A). \|\cdot\|_M)$, где $M(\alpha) = \Phi(\alpha\cdot e), \alpha \geqslant 0$.

Доказательство. Если $\varphi_x = \varphi_y$ для всех x и y из E, то $\varphi_x(\alpha) = \varphi_y(\alpha) = \alpha^p$ для некоторого $p \in [1, +\infty)$ (см. [40]), и поэтому $\Phi(\alpha x) = \alpha^p \Phi(x)$, $\alpha \geqslant 0$. Полагая $\alpha = (\|x\|_\Phi^{-1})$, получим $\Phi(x) = \|x\|_\Phi^p$. Таким образом, в этом случае, норма $\|\cdot\|_\Phi$ обладает свойством p - аддитивности:

$$\|x+y\|_\Phi^p = \|x\|_\Phi^p + \|y\|_\Phi^p, \ x, y \in A, \ xy = \theta, \ x \geqslant \theta, \ y \geqslant \theta$$

и поэтому в силу § 2.3 $(E, \|\cdot\|_{\Phi})$ изометрически и порядково изоморфно неассоциативному $L_p(A)$ - пространству.

Рассмотрим теперь общий случай.

Из свойств модуляра Φ вытекает, что $\mu(g) = \dfrac{\Phi(g)}{\Phi(e)}$ есть конечная σ - аддитивная, унитарно-инвариантная, строго-положительная мера на логике идемпотентов ∇ из A и величина $\|x\| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda|\, d\mu(e_\lambda)$ обладает свойством:

$$\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|,\ x\cdot y = \theta,\ x \geqslant \theta,\ y \geqslant \theta.$$

Тогда по следствию 2.3.9 и 2.3.5 а также теореме 2.3.8 следует существование точного нормального конечного следа τ на OJB - алгебре A.

Проводя аналогичные рассуждения как и в теореме 2.3.2, получаем, что A - модулярная JBW - алгебра.

Пусть $(L_M(A), \|\cdot\|_M)$ неассоциативное пространство Орлича, построенное на (A, τ) по функции Орлича $M(t)$. Покажем, что $(E, \|\cdot\|_{\Phi})$ изометрически и порядково изоморфно $(L_M(A), \|\cdot\|_M)$.

Если x - положительный простой элемент из A, т.е. имеет вид $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$, где $\lambda_i > 0$, $\{g_i\}$ - попарно ортогональные идемпотенты из A, то

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(\lambda_i g_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{g_i}(\lambda_i)\,\Phi(g_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_e(\lambda_i)\,\Phi(e).$$

$$\cdot\tau(q_i)=\tau\Big(\sum_{i=1}^{n}\varphi(\lambda_i e)q_i\Big)=\tau\Big(\sum_{i=1}^{n}M(\lambda_i)q_i\Big)=\tau(M(x)).$$

Поэтому

$$\|x\|_{\varphi}=\inf\Big\{\lambda>0:\varphi\Big(\frac{x}{\lambda}\Big)\le 1\Big\}=$$

$$=\inf\Big\{\lambda>0:\Big\|M\Big(\frac{x}{\lambda}\Big)\Big\|_1\le 1\Big\}=\|x\|_M.$$

Воспользовавшись тем, что каждый элемент в A имеет полярное разложение и всякий положительный элемент в A можно равномерно аппроксимировать простыми положительными элементами из A, мы получаем, что $\|x\|_{\varphi}=\|x\|_M$ для всех x из A.

Покажем, что A плотно в $(E, \|\cdot\|_{\varphi})$. Пусть x – произвольный положительный элемент из E. Рассмотрим семейство $\mathcal{P}$ всевозможных наборов $\{y_i\}_{i\in I}$ из $K\cap A$, обладающих свойством $\sum_{i\in\alpha} y_i\le x$ для любого $\alpha=(i_1,\dots,i_n)\subset I$. Обозначим через $G=\{y_j\}_{j\in J}$ – максимальный набор в $\mathcal{P}$ и положим $z_\alpha=\sum_{j\in\alpha} y_i$ для $\alpha=(j_1\dots,y_n)\subset J$. Сеть $\{z_\alpha\}$ возрастает, $z_\alpha\in K\cap A$, $z_\alpha\le x$, в частности

$$\sup\|z_\alpha\|_M=\sup\|z_\alpha\|_{\varphi}\le\|x\|_{\varphi}.$$

В силу порядковой непрерывности и монотонной полноты нормы $\|\cdot\|_M$ (см. теорема I.5.8 и доказательство теоремы

I.5.7) сеть сходится в $(L_M(A), \|\cdot\|_M)$.

Следовательно $\{z_\alpha\}$ фундаментальна в $(E, \|\cdot\|_\Phi)$ и поэтому существует такое $z \in E$, что $\|z - z_\alpha\|_\Phi \longrightarrow 0$. Так как конус K монотонно замкнут, то $z = \sup z_\alpha$. Если $x - z \neq \theta$, то найдется такой ненулевой элемент $z_0 \in K$, что $z_0 \le x - z$, $z_0 \le e$. Тогда $G \cup \{z_0\} \in \mathcal{P}$, что противоречит максимальности набора G. Таким образом, $z = x$ и поэтому $K \cap A$ плотно в K. Так как $K - K = E$, то A плотно в $(E, \|\cdot\|_\Phi)$. Аналогично устанавливается, что A плотно в $(L_M(A), \|\cdot\|_M)$.

Следовательно, тождественное отображение из $(A, \|\cdot\|_\Phi)$ в $(A, \|\cdot\|_M)$ продолжается до изометрии из $(E, \|\cdot\|_\Phi)$ на $(L_M(A), \|\cdot\|_M)$, которая очевидно, будет изометрическим и порядковым изоморфизмом $(E, \|\cdot\|_\Phi)$ на $(L_M(A), \|\cdot\|_M)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев Р.З. L_p - пространства для йордановых алгебр $(0 < p < 1)$. Доклады АН УзССР, 1983, № 9, с. 4-6.
2. Абдуллаев Р.З. Неассоциативные пространства L_p. Известия АН УзССР, серия физ.-мат.наук, 1983, № 6. с. 3-5.
3. Абдуллаев Р.З. Пространства L_p для йордановых алгебр с полуконечным следом. Деп. ВИНИТИ, № 1875-83. Деп. 19 с.
4. Абдуллаев Р.З. Пространства L_p для полуконечных JBW - алгебр. Дис. канд. физ.-мат.наук. - Ташкент, 1984, 104 с.
5. Антоновский М.Я., Болтянский В.Г., Сарымсаков Т.А. Топологические алгебры Буля. Ташкент, Изд-во АН УзССР, 1963, 133 с.
6. Аюпов Ш.А. К теории частично упорядоченных йордановых алгебр. Доклады АН УзССР, 1979, № 8, с. 6-8.
7. Аюпов Ш.А. Спектральная теорема для OJ - алгебр. Доклады АН УзССР, 1979, № 9, с. 3-5.
8. Аюпов Ш.А. OJ - алгебры ограниченных элементов. Известия АН УзССР, серия физ.-мат.наук, 1980, № 2, с. 3-8.
9. Аюпов Ш.А. Теорема эргодического типа в йордановых алгебрах. Известия АН УзССР, серия физ.-мат.наук, 1980, № 6, с. 10-16.
10. Аюпов Ш.А., Усманов Ш.М. Порядок и топология в йордановых алгебрах. Деп. ВИНИТИ, № 4232-80, 78 с.

II. А ю п о в Ш.А. Супермартингалы на йордановых алгебрах. В кн. "Случайные процессы и математическая статистика. Ташкент, Фан, I982, с. 20-3I.

I2. А ю п о в Ш.А. Интегрирование на йордановых алгебрах. Известия АН СССР, серия математическая, I982, т.47, № I, с. 3-25.

I3. А ю п о в Ш.А. Локально измеримые операторы для JW - алгебр и представление упорядоченных йордановых алгебр. Известия АН СССР, серия математическая, I984, т.48, № 2, с. 2II-236.

I4. Б е р д и к у л о в М.А. Пространства L_1 и L_2 для полуконечных JBW - алгебр. Доклады АН УзССР, I982, № 6, с.3-4.

I5. В у л и х Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Москва, Физматгиз, I96I, 407 с.

I6. Г р и б а н о в Ю.И. Нелинейные операторы в пространствах Орлича. Уч. зап. Казанского ун-та II5, 7 (I955).

I7. Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Д. Линейные операторы (Спектральная теория). М.: Мир, I974, 66I с.

I8. Ж е в л а к о в К.А., С л и н ь к о А.М., Ш е с т а к о в А.П., Ш и р ш о в А.П. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, I978, 432 с.

I9. З и г м у н д А. Тригонометрические ряды. ГОНТИ, I939, 323 с.

20. З и г м у н д А. Тригонометрические ряды. т. I и т.2, М.: Мир, I965.

2I. К а н т о р о в и ч Л.В., А к и л о в Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, I977, 74I с.

22. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.:Наука, 1981, 542 с.

23. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Изд-во физ.-мат.лит., 1958, 272 с.

24. Муратов М.А. Идеальные подпространства в кольцах измеримых операторов. Функциональный анализ. Сб. научн. трудов ТашГУ им. В.И.Ленина № 573, Ташкент, 1978, с. 58-60.

25. Муратов М.А. Идеальные подпространства в кольце измеримых операторов. Дис. канд. физ.-мат.наук - Ташкент, 1979, 133 с.

26. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Гостехиздат, 1957, 399 с.

27. Овчинников В.И. Симметричные пространства измеримых операторов. Доклады АН СССР, 191, 4 (1970), с. 769-771.

28. Овчинников В.И. Симметричные пространства измеримых операторов. Труды НИИматем. ВГУ, 3 (1971), с. 88-107.

29. Самойленко Ю.С. Спектральная теория наборов самосопряженных операторов. Киев. Наукова думка, 1984, 232 с.

30. Сарымсаков Т.А., Аюпов Ш.А. Частично упорядоченные йордановы алгебры. Доклады АН СССР, 1979, т. 249, № 4, с. 789-792.

31. Сарымсаков Т.А., Аюпов Ш.А., Хаджиев Дж., Чилин В.И. Упорядоченные алгебры. Ташкент, Фан, 1983. 300 с.

32. Трунов Н.В. Пространства L_p, ассоциативные с весом на полуконечной алгебре Неймана. В сб.: Конструктивн. теория функций и функц. анализ. Казань. I98I, вып. 3, с. 88-92.

33. Чилин В.И. Порядковая характеризация некоммутативных L_p-пространств. В кн. "Теория функций и ее приложения". Сб. науч. тр., Кемерово, I985. с. I9-23.

34. Чилин В.И. Банаховы упорядоченные * -алгеброиды с порядково-непрерывной и омнотонно полной нормой. Деп. УзНИИ НТИ, № I97, Уч.-84. Деп. I6 с.

35. Чилин В.И. Упорядоченные * - алгеброиды. Доклады АН СССР, I985, т. 28I, № 5,, с. I063-I067.

36. Эмх Ж. Алгебраические методы статистической механики и квантовой теории поля. М.: Мир, I976. 424 с.

37. Alfsen E.M., Shultz F.W., Stormer E. A Gelfand - Neumark theorem for Jordan algebras. Advances in Math., 1978, vol. 28, No 1, p. 11-56.

38. Aiupov Sh.A. Extension of traces and type criterions for Jordan algebras of self-adjoint operators. Math. Z. 1982, Vol. 181, p. 253-268.

39. Boyadjiev H.N., Youngson M.A. Alternators on Banach Jordan algebras. Доклады Болгар. АН, т. 33, № I2, I980, с. I589-I590.

40. Claas W.J., Zaanen A.C. Orlicz lattices. Comm. math., 1979, Vol. 1, p. 77-93.

41. Dinculeanu N. Espaces d'Orlocz de champs de vecteurs. Atti Accad. naz. Lincei. Rend. cl. sci. fis. mat. e natur. 22, 2 (1957). p. I35-I39.

42. D i n c u l e a n u N. Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs. Fonctionelles ineaires continues Atti Accad. naz. Lincei Rend. cl. sci. fis. mat. e natur 22, 3 (1957), p. 265-275.

43. G l e a s o n A.M. Measures on the closed subspaces of a Hilbert space. J. Math. Mech., 1957, 6, p.885-894.

44. H a a g e r u p U., H a n c h e - O l s e n H. Tomita- - Takesaki theory for Jordan algebras. Preprint Odense Universitet, 1982, No 4, p. 1-35.

45. H a n c h e - O l s e n H. JB -algebras with tensor products are C^* - algebras. Lect. Notes Math., 1985, 1132, p. 223-229.

46. L a n c e E.Ch. Ergodic theorem for convexs set and operator algebras. Invent Math., 37, 1976,№ 3,p.203-2I4.

47. L a c e y H.E. The isometric theory of classical Banach spaces. Springer Verlag, 1974. p.270.

48. L u x e m b u r g W.A.J. Banach function spaces. van Gorcum and C.Assen., 1955.

49. M u r r a y F.J., and J.von N e u m a n n. On rings of operators. Ann. Math., 37 (1936), p. 116-229.

50. M u r r a y F.J. and J. von N e u m e r n. On rings of operators, II. Trans. Amer. Math. Soc., 41 (1937), p. 208-248.

51. M u r r a y F.J. and J. von N e u m a n n. On rings of operators, IV, Ann. Math., 44 (1943), p.716-808.

52. N e l s o n E. Notes on non-commutative integrations theory. J. Funct. Anal., 1974. vol. 15, p.103-116.

53. O r l i c z W. Über eine gewisse Klasse von Räumen von Typus B, Bull. intern. de I'Acad. Pol. serie A, Cracovie, 1932.

54. O r l i c z W. Über Räume (L^M) , Bull. Intern. de I'Acad. Pol. serie A, Cracovie (1936).

55. S a k a i S. C^* - algebras and W^* -algebras. Springer Verlag, 1971.,p.256.

56. S h u l t z F.W. On normed Jordan algebras whuch are Banach dual spaces. J. of Funct. Analysis., 1979, vol. 31, No 3, p. 360-376.

57. S e g a l F.E. A non commutative extension of abstract integration. Ann. of Math., vol. 57 (1953), p.401-457.

58. S t i u e s p r i n g W.F. Integration theorems for gages and auality for unimodular groups. Trans. Amer. Math. Soc., vol.90, 1959, No 1, p. 15-56.

59. S t o r m e r E. Jordan algebras of type I. Acta Math., 1966, vol. 115, No 3-4, p. 165-184.

60. T a k e s a k i M. Theory of operator algebras. Springer, New-York, 1979, p.4I5.

61. T o p p i n g D. Hordan algebras of self-adjoiut operators. Mem. Amer. Soc., 1965, No 53, p. 1-48.

62. Y e a d o n F.J. Non commutative L^p - spaces. Proc. Camb. Phil. Soc., 1975, vol. 77, p. 91-102.

63. Y e a d o n F.J. Ergodic theorems for semifinite von Neumann algebras II. Proc. Camb. Phil. Soc., 1980, vol. 88, p. 135-147.

64. V a r a d a r a j a n V. Probability in physics and a theorem on simultaneous obsercability. Comm. Pure. Appl. Math., 15, 1962, p. 189-217.

65. W u l f s o h n A. Tensor products of Jordan algebras. Canad. Jorn. Math., vol. 27, No 1, 1975, p. 60-74.

66. Т а д ж и б а е в Б.Р. Неассоциативные пространства Орлича измеримых элементов в йордановых алгебрах. Деп. ВИНИТИ, № 5954-83, 1983, Деп. 52 с.

67. Т а д ж и б а е в Б.Р. Абстрактная характеризация неассоциативных пространств Орлича. Доклады АН УзССР, 1985, № 10, с. 4-6.

68. Т а д ж и б а е в Б.Р. Операторы в пространстве Орлича. Деп. ВИНИТИ, № 8593 - В, 1985, Деп. 15 с.

69. Т а д ж и б а е в Б.Р. Абстрактная характеризация неассоциативных L_p - пространств и пространств Орлича. Деп. ВИНИТИ № 1375-В 86, 1986, Деп. 48 с.